Ein Beitrag zur Vorausberechnung der Kommutationsverhältnisse bei Gleichstrommaschinen und des Spannungsabfalls bei Wechselstromgeneratoren.

Inaugural-Dissertation

verfasst

und der Abteilung für Elektrotechnik der Grossherzogl.-Badischen Technischen Hochschule Karlsruhe

zur

Erlangung der Würde eines Doktor-Ingenieurs

vorgelegt von

HANS GALLUSSER

Dipl.-Ing. aus Romanshorn.

Genehmigt von der Technischen Hochschule Karlsruhe am 22. April 1902.

Referent: Hofrat Prof. E. ARNOLD.

Korreferent: Prof. Dr. A. SCHLEIERMACHER.

STUTTGART.

DRUCK DER UNION DEUTSCHE VERLAGSGESELLSCHAFT.

1902.

Diese Arbeit wurde auf Veranlassung des Herrn Hofrat Prof. E. ARNOLD im Elektrotechnischen Institut der Grossh. Technischen Hochschule Karlsruhe ausgeführt.

Für die wertvollen Ratschläge während der Untersuchung spreche ich meinem hochverehrten Lehrer den besten Dank aus.

Meinen lieben Eltern

gewidmet.

Einleitung.

Bekanntlich sind die Belastungsgrenzen einer Dynamomaschine durch die Funkenbildung und durch die zulässige Erwärmung gegeben. Bei einer gut berechneten Maschine, d. h. bei bester Ausnutzung des Materials kann man aber heute verlangen, dass die Belastungsgrenze nur noch durch die Erwärmung bedingt wird, und die Funkenbildung nicht mehr in Frage kommen darf. Da für letztere die Kommutationsverhältnisse ausschlaggebend sind, so ist es von grösster Wichtigkeit, die Selbstinduktion einer kurzgeschlossenen Spule und die gegenseitige Induktion derselben mit den anderen kurzgeschlossenen Spulen zu kennen.

Wie Arnold in seinem unten zitierten Werke nachweist, ist der zeitliche Verlauf des Kurzschlussstromes für die Funkenbildung und die Erwärmung des Kollektors massgebend und ein geradliniger Verlauf dieser Kurve, d. h. konstante Stromdichte unter den Bürsten am günstigsten. Um letzteres zu erhalten, muss aber das kommutierende Feld oder die von diesem in der Spule induzierte E.M.K. den Wert haben

$$e_k = 2\,i_a \left[\frac{L + \Sigma(M)}{T} + R\left(\frac{t}{T} - \frac{1}{2}\right)\right]^{1)}.$$

Daselbst bedeutet:

i_a = Strom pro Ankerstromzweig,

L = Selbstinduktionskoeffizient einer kurzgeschlossenen Spule,

---

[1]) Siehe Die Gleichstrommaschine von Professor E. Arnold. Verlag von J. Springer. Berlin 1902. I. Teil: Theorie der Gleichstrommaschine S. 283, 286 und 485.

M = gegenseitiger Induktionskoeffizient dieser Spule und einer benachbarten kurzgeschlossenen Spule,
T = Kurzschlusszeit,
R = Widerstand der kurzgeschlossenen Spule.

Weicht die vom Felde induzierte E.M.K. von e_k ab, so entsteht in der kurzgeschlossenen Spule ein zusätzlicher Strom, der eine ungleichmässige Stromverteilung unter den Bürsten verursacht und dadurch zu einer grossen Spannungsdifferenz zwischen den Bürstenspitzen und der ab- resp. auflaufenden Lamelle Veranlassung gibt.

Bei modernen Maschinen verlangt man, dass die Bürsten von Leerlauf bis Volllast nicht verschoben zu werden brauchen. Es kann somit die kommutierende E.M.K. nur für eine mittlere Belastung den richtigen Wert haben. Die Bürsten müssen sich deshalb so einstellen lassen, dass weder bei Leerlauf noch bei Volllast die Spannung zwischen den Bürstenspitzen und der ab- resp. auflaufenden Lamelle einen so grossen Wert annehmen kann, dass Funken entstehen. Werden nun die Bürsten so eingestellt, dass die Spannung zwischen der Bürstenspitze und der ablaufenden Lamelle bei Leerlauf und Volllast die gleiche ist, so lässt sich diese aus der folgenden Formel berechnen:

$$P_T'' = \frac{e_m + e_q}{1 - \frac{e_s}{P_w}} \text{ für } P_w > e_s,$$

wenn

P_w = eine von der Kohlensorte abhängige constante Spannung,
e_q = die vom Ankerfeld in der kurzgeschlossenen Spule induzierte E.M.K.,
$e_m = \frac{L + \Sigma M}{T} \cdot i_a$,
$e_s = k_u \cdot \frac{L_s}{T} \cdot 2\, i_a$ die effektive E.M.K. der scheinbaren Selbstinduktion in der Kurzschlusszeit,
k_u = der Formfaktor dieser E.M.K.,
L_s = der scheinbare Selbstinduktionskoeffizient

bedeutet.

P_T'' darf eine gewisse Grenze, die von der Kohlensorte abhängig ist, nicht überschreiten. Für die Spannung P_T' zwischen der Bürstenspitze und den auflaufenden Kollektorlamellen erhalten wir einen Wert, der kleiner ist als P_T''.

Wenn also für die ablaufende Kollektorlamelle die Bedingung

für funkenfreien Gang erfüllt ist, so treten auch zwischen der auflaufenden Lamelle und der Bürstenspitze keine Funken auf.

Ist aber

$$P_w \overline{\overline{<}} e ,$$

so wird P_T'' unendlich gross und die Maschine wird funken.

Es ist daher für die Vorausberechnung von Gleichstrommaschinen von grosser Bedeutung, die Induktionskoeffizienten

$$L, M \text{ und } L_s$$

mit einiger Genauigkeit berechnen zu können.

Aber nicht nur bei der Vorausberechnung von Gleichstrommaschinen ist die Kenntnis der Induktionskoeffizienten von Wichtigkeit, sondern wie E. Arnold und J. L. la Cour in ihrem vor einiger Zeit erschienenen „Beitrag zur Vorausberechnung und Untersuchung von Ein- und Mehrphasengeneratoren“ gezeigt haben, ist gerade auch bei der Vorausberechnung der Wechselstromgeneratoren und speziell für die einwandsfreie Vorausbestimmung des Spannungsabfalles derselben die Ermittelung des Selbstinduktionskoeffizienten der Armaturspulen durchaus erforderlich.

A. Berechnung der Induktionskoeffizienten.

I. Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten L.

Während der Kommutation befinden sich die induzierten Seiten der kurzgeschlossenen Spule zwischen den Polen. Die experimentelle Untersuchung hat ergeben, dass der Selbstinduktionskoeffizient einer Ankerspule in dieser Lage und für den Fall, dass der Anker sich ausserhalb des Feldes, also in Luft befindet, praktisch gleich ist (siehe S. 32). Dieses wichtige Resultat ermöglicht es uns, den Selbstinduktionskoeffizienten L einer Ankerspule während der Kommutation mit grosser Annäherung zu berechnen.

Denken wir uns den Anker aus dem Feld herausgenommen und um die zu untersuchende Spule ein Kraftlinienbild entworfen, das dem wirklichen möglichst nahe kommen soll, so lassen sich nun bei diesem Kraftlinienbilde folgende Teile unterscheiden:

α) der induzierte Teil,

β) die Stirnverbindungen und beim Ringanker noch

γ) die innere Verbindung.

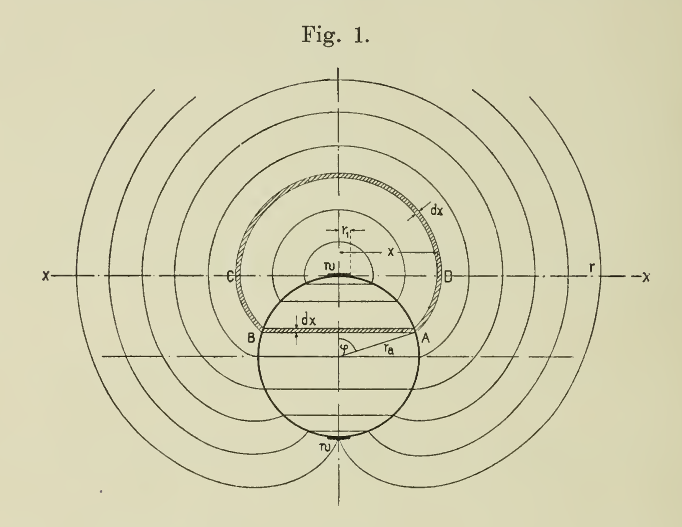
Für alle diese Teile sind aber die einzelnen Kraftlinienbilder ganz verschieden, so dass jeder Teil für sich gerechnet werden muss.

1. Glatte Armaturen.

a) Trommelanker.

In Fig. 1 ist eine glatte Trommelarmatur mit einer Durchmesserspule von der Windungszahl w dargestellt. Für eine induzierte Seite ist das Kraftlinienbild aufgezeichnet, über welches sich noch ein gleiches, aber umgekehrtes, herrührend von der anderen Spulenseite,

Fig. 1.



superponieren würde. Für den Entwurf eines solchen Kraftlinienbildes, das dem wirklichen sehr nahe kommen soll, sind zwei Bedingungen möglichst zu erfüllen:

α) Da die magnetische Leitfähigkeit des Eisens gegenüber der Luft ausserordentlich gross ist, so müssen die Kraftröhren senkrecht oder nahezu senkrecht auf den Anker auftreffen.

β) Die Leitfähigkeit des Feldes muss möglichst gross sein, weil das Feld einer Strombahn sich stets so einstellt, dass die Energie desselben ein Maximum ist.

Man wird daher am besten thun, andere Kraftlinienbilder zu entwerfen und von diesen dasjenige wählen, das die grösste Leitfähigkeit besitzt.

Das in Fig. 1 gezeichnete Kraftlinienbild ist so entworfen worden, dass es diesen beiden Bedingungen möglichst genügt. Der Kraft-

linienweg in der Luft setzt sich aus zwei verschiedenen Kurven zusammen. Der Teil, der über der x-Achse liegt, ist ein Halbkreis, die beiden anderen Teile (AD und BC) sind Evolventen mit dem Umriss des Ankers als Grundkreis. Um nun den Selbstinduktionskoeffizienten dieser Spule berechnen zu können, bedienen wir uns eines wichtigen Satzes der theoretischen Elektrizitätslehre, dass die Intensität des magnetischen Kraftflusses Φ gleich ist der magnetomotorischen Kraft $\mathfrak{M}$ multipliziert mit der magnetischen Leitfähigkeit F.

Betrachten wir zunächst einen schmalen Streifen. Da der Widerstand des Kraftflusses im Eisen gegenüber dem in der Luft ausserordentlich klein ist, so dürfen wir, ohne einen merkbaren Fehler zu begehen, diesen Widerstand vernachlässigen [1]). Somit ist die magnetische Leitfähigkeit dieses kleinen Streifens

$$d\,F = \frac{d\,x\,.\,l}{\pi\,x + 2\,\frac{r_a\,.\,\varphi^2}{2}},$$

wo l die Länge des Ankers ist und die Bedeutungen der anderen Buchstaben aus Fig. 1 ersichtlich sind. Daselbst ist

$$r_a\,.\,\varphi = x \qquad \text{oder} \qquad \varphi = \frac{x}{r},$$

folglich wird

$$d\,F = \frac{d\,x\,.\,l}{\pi\,x + \frac{x^2}{r_a}} = \frac{r_a\,.\,l\,.\,d\,x}{x^2 + \pi\,.\,r_a\,.\,x}.$$

Im Intervall $0 - r_1$ ist x gegenüber r_a so klein, dass $\frac{x^2}{r_a}$ vernachlässigt werden darf. Es ist somit für dieses Intervall $0 - r_1$

$$d\,F = \frac{l\,.\,d\,x}{\pi\,.\,x}$$

die magnetomotorische Kraft $\mathfrak{M}_1$ im Intervall $0 - r_1$ ist

$$\mathfrak{M}_1 = \frac{4\,\pi}{10}\,.\,w\,.\,\frac{x}{r_1}$$

und mithin der Kraftfluss $d\,\Phi_1$

$$d\,\Phi_1 = \frac{4\,\pi}{10}\,w\,.\,\frac{x}{r_1}\,.\,\frac{l\,.\,d\,x}{\pi\,.\,x}.$$

---

[1]) Diese Annahme gilt nicht bloss hier, sondern auch bei allen späteren Berechnungen.

Der Kraftfluss $d\Phi_1$ ist mit $\frac{x \cdot w}{r_1}$ Windungen verkettet, der Selbstinduktionskoeffizient L_1 wird also für das Intervall $0 - r_1$

$$L_1 = \int_0^{r_1} 0{,}4 \cdot \frac{w}{r_1} \cdot l \cdot w \frac{x}{r_1} dx,$$

$$\mathbf{L_1 = 0{,}2\, w^2 l = w^2 l \cdot \lambda_w}, \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (1)$$

wo $\lambda_w = 0{,}2$ bedeutet.

Im Intervall von $r_1 - r$ ist die magnetomotorische Kraft $\mathfrak{M}_2$ konstant

$$\mathfrak{M}_2 = \frac{4\pi}{10} w$$

und der Kraftfluss derselben umschlingt alle Windungen der Spule. Der Selbstinduktionskoeffizient L_2 dieses Raumes wird dann

$$L_2 = \int_{r_1}^{r} \frac{4\pi}{10} \cdot w \cdot w \cdot \frac{r_a \cdot l \cdot dx}{x^2 + \pi r_a x}.$$

Es ist aber $r = r_a \cdot \pi$,

$$L_2 = \frac{4\pi}{10} w^2 \cdot r_a \cdot l \int_{r_1}^{\pi r_a} \frac{dx}{x^2 + \pi r_a x} = 0{,}4 \cdot \pi \cdot w^2 \cdot l \frac{1}{\pi r_a} \Big[\lg nat \left(\frac{x}{x + \pi r_a} \right) \Big]_{r_1}^{\pi r_a},$$

$$L_2 = 0{,}4 \cdot w^2 \cdot l \cdot \lg nat \left(\frac{r_1 + \pi r_a}{2 r_1} \right).$$

Und indem wir noch die Briggschen Logarithmen einführen $\lg nat\, x = 2{,}3 \cdot \lg^{10} x)$ und L_2 in Henry ausdrücken, erhalten wir

$$\mathbf{L_2 = \frac{w^2 \cdot l}{10^8} \cdot 0{,}92 \cdot \lg \left(\frac{r_1 + \pi r_a}{2 r_1} \right)}. \quad . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Der Selbstinduktionskoeffizient L des induzierten Teiles der Spule ist gleich der Summe von L_1 und L_2 multipliziert mit der Anzahl der Spulenseiten u, in unserem Falle mit 2

$$\mathbf{L = 2(L_1 + L_2) = \frac{w^2 \cdot 2 \cdot l}{10^8} \left[0{,}2 + 0{,}92 \cdot \lg \left(\frac{r_1 + \pi r_a}{2 r_1} \right) \right]}. \quad (3)$$

Bei allen bisher in der Litteratur bekannten Berechnungen von L_2 wird nur der Kraftlinienweg oberhalb der x-Achse berücksichtigt, d. h. der Anker wird in eine Ebene gerollt gedacht.

Fischer-Hinnen und Girault berechnen nur L_1 und vernachlässigen L_2 ganz. Arnold dagegen hat L_2 in die Berechnung von L eingeführt und erhält unter der obigen Annahme für

$$L_2 = \int_{r_1}^{r_2} \frac{4\pi w^2}{10} l . \frac{dx}{\pi x} = \frac{w^2 l}{10^8} . 0{,}92 . \lg\left(\frac{r_2}{r_1}\right).$$

r_2 muss aber hier kleiner als r sein, weil wir sonst eine zu grosse Leitfähigkeit bekommen würden. Wenn wir die früher abgeleitete Formel für L_2 mit derjenigen von Arnold vergleichen, so sehen wir, dass beide dieselben konstanten Koeffizienten besitzen, die Werte unter den Logarithmen dagegen verschieden sind. Setzen wir diese Ausdrücke unter den Logarithmen einander gleich und berechnen daraus r_2, so erhalten wir

$$r_2 = \frac{r_1 + \pi r_a}{2}$$

und indem wir diesen Wert in die Arnoldsche Formel einsetzen, bekommen wir für L_2 denselben Wert, den wir durch die frühere Formel 2 gefunden haben, d. h. das Kraftlinienbild von Fig. 1 ist auf einen Halbkreisring mit den Radien r_1 und r_2 reduziert worden, der dieselbe Leitfähigkeit besitzt.

Die Arnoldsche Formel kann also doch richtige Werte von L_2 liefern, trotzdem der Kraftlinienweg nur teilweise berücksichtigt wird; wir müssen nur für die obere Grenze der Integration den Wert

$$r_2 = \frac{r_1 + \pi r_a}{2}$$

einsetzen, der kleiner ist als r. Dieser Wert r_2 gilt aber nur für Durchmesserspulen. Ist die Maschine mehrpolig, so ist die Entfernung der induzierten Seiten einer Spule ungefähr gleich einer Polteilung τ. Es ist mithin

$$r = \frac{\pi . r_a}{p},$$

wo p die Anzahl der Polpaare bedeutet. In diesem Falle erhalten wir für

$$L_2 = \frac{w^2 . l}{10^8} . 0{,}92 . \lg\left(\frac{r_1 + \pi . r_a}{r_1 (1 + p)}\right).$$

Für r_2 der Arnoldschen Formel gilt somit

$$r_2 = \frac{r_1 + \pi r_a}{1 + p}.$$

Da r_1 gegenüber r_a sehr klein ist, so dürfen wir r_1 vernachlässigen, und es wird dann

$$r_2 = \frac{\pi \,.\, r_a}{1 + p}.$$

Ferner ist

$$\pi \,.\, r_a = \tau \,.\, p$$

daraus folgt für r_2

$$r_2 = \tau \,.\, \frac{p}{1 + p}. \quad \ldots \ldots \ldots \quad (4)$$

Indem wir diesen Wert in die Arnoldsche Formel einführen, erhalten wir für den Selbstinduktionskoeffizienten L_2

$$L_2 = \frac{w^2 \,.\, l}{10^8} \,.\, 0{,}92 \,.\, \lg\left(\frac{\tau}{r_1} \,.\, \frac{p}{1 + p}\right) = \frac{w^2 l}{10^8} \,.\, w^2 \,.\, l \,.\, \lambda_k,$$

wo

$$\lambda_k = 0{,}92 \,.\, \lg\left(\frac{\tau}{r_1} \,.\, \frac{p}{1 + p}\right),$$

somit ist

$$\mathbf{L} = \frac{w^2 \,.\, 2 \,.\, l}{10^8}\left[0{,}2 + 0{,}92 \lg\left(\frac{\tau}{r_1} \,.\, \frac{p}{1 + p}\right)\right] = \frac{w^2 \,.\, 2 \,.\, l}{10^8}(\lambda_w + \lambda_k). \quad (5)$$

Für die Berechnung des Selbstinductionskoeffizienten der beiden Stirnverbindungen darf die Formel

$$L_3 = \frac{w^2 \,.\, 2 \,.\, l_s}{10^8}\left[0{,}46 \,.\, \lg\frac{l_s}{d_s} - 0{,}11\right] = \frac{w^2 \,.\, 2 \,.\, l_s}{10^8}\lambda_s, \quad . \quad (6)$$

wo

$$\lambda_s = 0{,}46 \lg\frac{l_s}{d_s} - 0{,}11$$

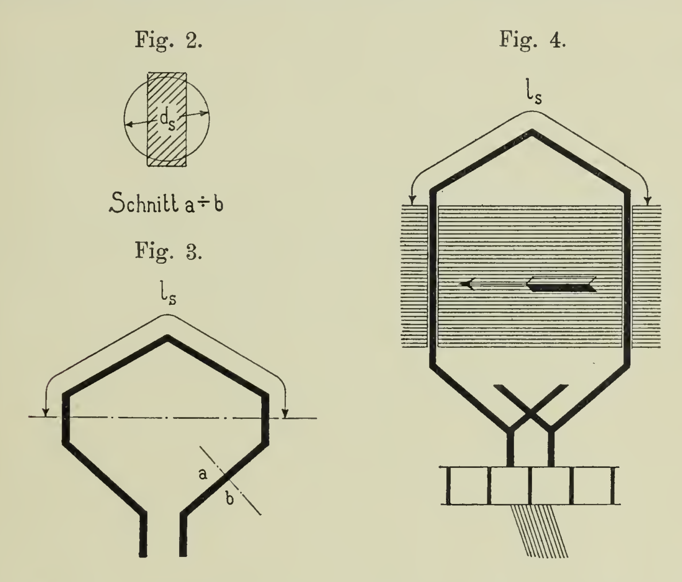
bedeutet, verwendet werden. Hierin ist (siehe Fig. 2 bis 4):

l_s = Länge einer Stirnverbindung,

d_s = Durchmesser desjenigen Kreises, der denselben Umfang hat, wie die ganze Stirnverbindung, Isolation der Drähte eingerechnet.

Diese Formel ist in einem kürzlich erschienenen Hefte (Sammlung elektrotechnischer Vorträge, herausgegeben von Prof. Dr. Ernst Voit, Bd. III, Heft 1 bis 3) „Beitrag zur Vorausberechnung und Unter-

suchung von Ein- und Mehrphasenstromgeneratoren von E. Arnold und J. L. la Cour, Karlsruhe, Elektrotechnisches Institut der technischen Hochschule" auf S. 86 abgeleitet worden und zwar unter der Annahme, dass der Einfluss des in der Nähe der Stirnverbindungen sich befindlichen Eisens nicht berücksichtigt wird, dass also dieselben ganz in Luft gedacht sind. Diese Voraussetzung ist berechtigt, denn in der Nähe der Stirnverbindungen haben wir nicht nur lamelliertes Eisen, das die Leitfähigkeit des Kraftflusses erhöht, sondern auch massive Eisenteile. Letztere dämpfen, wie wir später bei den experimentellen Untersuchungen sehen werden, den Kraftfluss sehr stark;



sie haben also die entgegengesetzte Wirkung vom lamellierten Eisen. Ob sich diese entgegengesetzten Wirkungen ganz aufheben, lässt sich allerdings nicht genau feststellen, weil eine diesbezügliche mathematische Untersuchung ausserordentlich schwierig oder sogar unmöglich ist. Die oben angegebene Formel scheint immerhin, wie die späteren experimentellen Untersuchungen ergeben werden, ganz gute Werte zu liefern.

Der Selbstinduktionskoeffizient der ganzen Spule wird nun

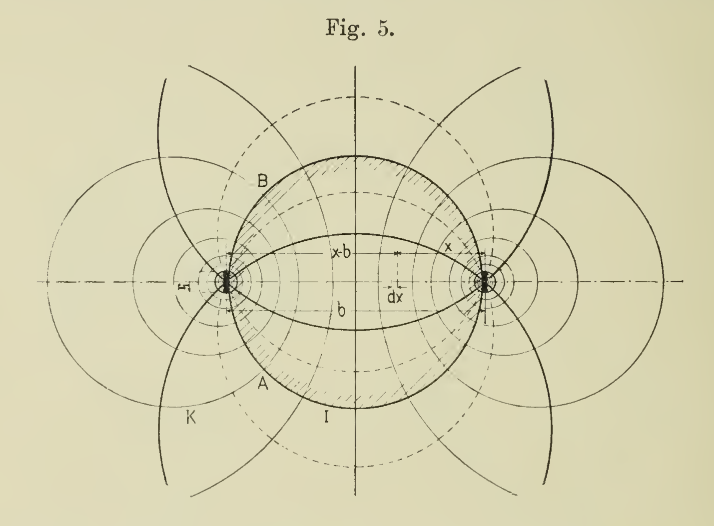
$$L = \frac{w^2 \cdot 2 \cdot l}{10^8} \left[\lambda_w + \lambda_k + \frac{l_s}{l} \lambda_s \right] = \frac{w^2 \cdot 2 \cdot l}{10^8} \lambda. \quad . \quad . \quad (7)$$

λ bedeutet den pro Ampèrewindung und pro Centimeter Armaturlänge erzeugten Kraftfluss, wenn der gesamte Kraftfluss der Spule auf

die doppelte Armaturlänge reduziert ist; oder wir können λ auch als die Leitfähigkeit pro Centimeter Armaturlänge bezeichnen, wenn die gesamte Leitfähigkeit der Spule auf die doppelte Armaturlänge reduziert ist. Dieser Wert ist charakteristisch für die Form des Ankers und der Spule, denn er gestattet uns, die Selbstinduktionskoeffizienten von Spulen verschiedener Armaturen zu vergleichen.

Der Kraftfluss des induzierten Teiles lässt sich noch auf eine andere Weise ermitteln. In Fig. 5 bedeutet $2\,r_1$ die Breite der zwei Spulenseiten einer Spule, welche sich vorläufig in Luft befinden soll. Wenn ein Strom dieselbe durchfliesst, so entsteht das aufgezeichnete

Fig. 5.



Kraftlinienbild und der Kraftfluss $d\,\Phi$ durch das Flächenelement $d\,x$ pro 1 cm Spulenlänge, und bei einem Strome von 1 Ampère wird

$$d\,\Phi = \left(\frac{0{,}2}{x} + \frac{0{,}2}{b - x}\right) d\,x.$$

Der Kraftfluss zwischen den zwei Spulenseiten, der mit allen Windungen einer Spulenseite verkettet ist, wird

$$\Phi_2 = 0{,}2 \left(\int_{r_1}^{b} \frac{1}{x}\,d\,x + \int_{b-r_1}^{0} \frac{1}{b-x}\,d\,x\right) = 0{,}92 \lg\left(\frac{b}{r_1}\right)$$

und wenn die Spule aus w Windungen besteht

$$\Phi = 0{,}92\,.\,w\,.\lg\left(\frac{b}{r_1}\right).$$

Die Niveauflächen von Fig. 5 sind Kreiscylinderflächen, welche sich in der Mitte der beiden Spulenseiten schneiden.

Jede Kraftlinie trifft eine Niveaufläche zweimal, z. B. die Kraftlinie K schneidet die Niveaufläche I in den Punkten A und B. Der Kraftfluss einer Kraftröhre mit dieser Kraftlinie als Mittellinie hat von A nach B denselben Widerstand zu überwinden, wie aussen herum von B nach A. Wenn wir nun die Niveaufläche I mit Eisen ausfüllen, so wird der Kraftfluss Φ aufs doppelte steigen, weil der Widerstand infolge des Eisens nur noch halb so gross ist. Also

$$\Phi = 2 \, . \, 0{,}92 \, . \, w \, . \, \lg \left(\frac{b}{r_1}\right).$$

Der Kraftfluss ist mit w Windungen verkettet, somit ist für die ganze Länge des induzierten Teiles

$$L = 1{,}84 \, . \, l \, . \, w^2 \, . \, \lg \left(\frac{b}{r_1}\right).$$

Hierzu kommt noch die Kraftflussverkettung, die im Innern der zwei Spulenseiten verläuft; dieselbe ist nach früherem

$$L_1 = 2 \, . \, 0{,}2 \, . \, w^2 \, . \, l.$$

Somit wird

$$\mathbf{L} = \frac{w^2 \, . \, l \, . \, 2}{10^8} \left[0{,}2 + 0{,}92 \, . \, \lg \left(\frac{b}{r_1}\right)\right].$$

Diese Formel gilt aber nur für glatte Armaturen, denn sobald die Drähte in Nuten liegen, ist die Ankeroberfläche keine Niveaufläche mehr.

b) Ringanker.

Beim Ringanker (siehe Fig. 6) sind für die Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten L einer Spule drei Teile zu unterscheiden:

1. Der induzierte Teil A D,
2. die Verbindungen an den Stirnflächen A B und D C,
3. die Verbindung innerhalb des Ankers B C.

Nach dem Vorhergehenden erhalten wir für

$$L_{AD} = \frac{w^2 \, . \, l}{10^8} \left[0{,}2 + 0{,}92 \, . \, \lg \left(\frac{r_2}{r_1}\right)\right],$$

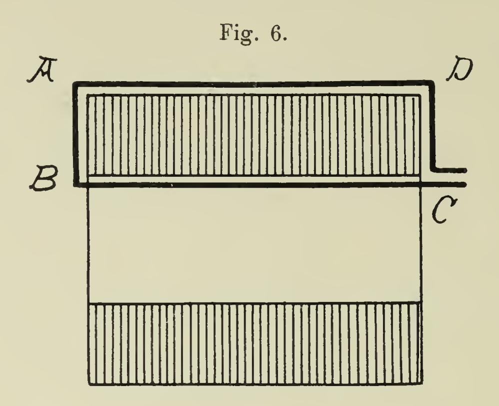
wo

$$r_2 = \frac{r_1 + \pi \, r_a}{2}$$

bedeutet.

Für das Stück A B und D C berücksichtigen wir nur den Kraftfluss, der in die Stirnseite ein- resp. austritt. Wie aus Fig. 7 ersichtlich, ist für die verschiedenen Punkte der Spulenseiten A B und D C der Wert von r nicht mehr konstant, sondern variiert von r_1 bis r_2,

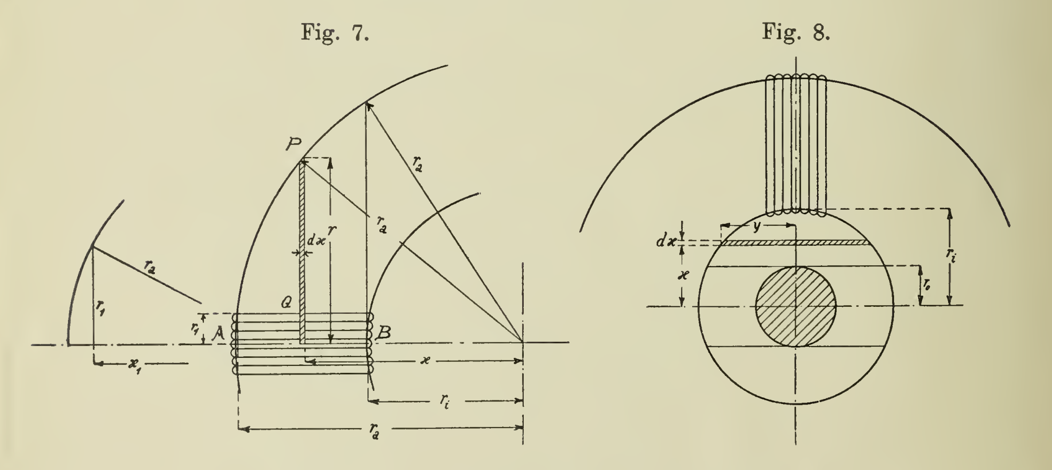
Fig. 6.



d. h. der Punkt P wandert auf dem äusseren Kreis des Ankers. Die Leitfähigkeit des Streifens P Q ist

$$d F_1 = 0{,}4 \,.\, \lg \operatorname{nat} \left(\frac{r}{r_1}\right) d x = 0{,}4 \lg \operatorname{nat} \frac{\sqrt{r_a^2 - x^2}}{r_1} d x.$$

Fig. 7. Fig. 8.



Indem wir $\frac{x}{r_a} = \cos \alpha$ substituieren, erhalten wir

$$\int \lg \operatorname{nat} \left(\frac{\sqrt{r_a^2 - x^2}}{r_1}\right) d x = - r_a \,.\int \lg \operatorname{nat} \left(\frac{r_a \,.\, \sin \alpha}{r_1}\right) \sin \alpha \, d \alpha$$

$$= 2{,}3\ r_a \,.\, \cos\alpha\ \lg\left(\frac{r_2}{r_1}\right) - r_a \int \lg nat\,(\sin\alpha)\,.\,\sin\alpha\,.\,d\alpha$$

$$\int \lg nat\,(\sin\alpha)\,\sin\alpha\,d\alpha = +\,2{,}3\,\cos\alpha\,.\,\lg\,(\sin\alpha) - \int \frac{\cos^2}{\sin\alpha}\,d\alpha$$

$$-\int \frac{\cos^2\alpha}{\sin\alpha}\,d\alpha = -\int \frac{1}{\sin\alpha}\,d\alpha + \int \sin\alpha\,d\alpha$$

$$= -\,2{,}3\,\lg\left(tg\,\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\alpha.$$

Somit wird

$$-\,r_a \int \lg nat\left(\frac{r_a\,.\,\sin\alpha}{r_1}\right).\,\sin\alpha\,.\,d\alpha = -\,2{,}3\,r_a\,\lg\left(tg\,\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$-\,r_a\,.\,\cos\alpha + 2{,}3\,r_a\,.\,\cos\alpha\,\lg\left(\frac{r_a}{r_1}\right) + 2{,}3\,r_a\,.\,\cos\alpha\,\lg\,(\sin\alpha).$$

Es ist nun

$$\frac{x}{r_a} = \cos\alpha$$

und daraus folgt für $tg\,\frac{\alpha}{2}$

$$tg\,\frac{\alpha}{2} = \frac{\sqrt{r_a^2 - x^2}}{x + r_a}\ ;$$

diese Werte eingesetzt gibt

$$\int\limits_{x_1 = \sqrt{r_a^2 - r_1^2}}^{r_i} \lg nat\,\frac{\sqrt{r_a^2 - x^2}}{r_1}\,dx = \Bigg[2{,}3\,.\,x\,\lg\left(\frac{\sqrt{r_a^2 - x^2}}{r_1}\right)$$

$$- x - 2{,}3\,r_a\,\lg\left(\frac{\sqrt{r_a^2 - x^2}}{x + r_a}\right)\Bigg]_{x_1}^{r_i}.$$

Somit wird

$$\mathbf{L_{AB}} = \frac{\mathbf{w}^2}{\mathbf{10}^8}\left\{\mathbf{0{,}2\,(r_a - r_i) + 0{,}4\left[r_a\left(2{,}3\,\lg\frac{2\,r_a\,r_2}{r_1\,(r_a + r_i)} - 1\right)\right.}\right.$$

$$\left.\left.\mathbf{- r_i\left(2{,}3\,.\,\lg\frac{r_2}{r_1} - 1\right)\right]}\right\} \quad \ldots\ldots\ldots \quad (8)$$

In Wirklichkeit wird aber L_{AB} kleiner ausfallen, weil der ins Eisenblech eintretende Kraftfluss durch die entstehenden Wirbelströme gedämpft wird.

Um L_{BC} einfach berechnen zu können, nehmen wir an, dass der Verlauf des Kraftflusses im Innern parallel zur y-Achse erfolge (siehe Fig. 8). Diese Annahme ist berechtigt, da die Leitfähigkeit in diesem Fall ziemlich mit derjenigen des wirklichen Kraftflusses übereinstimmt. Den Kraftfluss, der durch die Achse des Ankers hindurchgeht, darf man vernachlässigen, da derselbe infolge der hohen Periodenzahl fast ganz gedämpft wird. Wir erhalten somit für die Leitfähigkeit im Innern des Ankers pro 1 cm Armaturlänge

$$F_i = 2 \int_{r_0}^{r_i} \frac{d\,x}{2 \cdot \sqrt{r_i^2 - x^2}} = \left[\arc\sin \frac{x}{r_i}\right]_{r_0}^{r_i} = \frac{\pi}{2} - \arc\sin \left(\frac{r_o}{r_i}\right).$$

Der Selbstinduktionskoeffizient L_{BC} wird

$$L_{BC} = \frac{w^2 \cdot l \cdot 1{,}25}{10^8} \left[\frac{\pi}{2} - \arc\sin \frac{r_o}{r_i}\right]. \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

L_{BC} wird auch etwas kleiner ausfallen, als die Rechnung ergibt, da der bewickelte Anker durch Messingarme getragen wird, die einen Teil des berechneten Kraftflusses dämpfen. Der Selbstinduktionskoeffizient L der ganzen Spule ist also

$$L = L_{AD} + 2\,L_{AB} + L_{BC}.$$

2. Nutenanker.

a) Eine Spulenseite pro Nut.

Liegen die Spulen in Nuten, so können wir bezüglich der Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten derselben zwei Teile unterscheiden:

1. Der induzierte oder der in der Nut gelegene Teil.
2. Die Stirnverbindungen.

Der Kraftfluss, der mit dem ersten Teil verkettet ist, setzt sich aus den Kraftflüssen Φ_α, Φ_β und Φ_γ zusammen:

Φ_α verläuft in der Nut und umschlingt die Spule nur teilweise (zwischen A und B, siehe Fig. 9),

Φ_β verläuft in der Nut und umschlingt die Spule ganz (zwischen B und C),

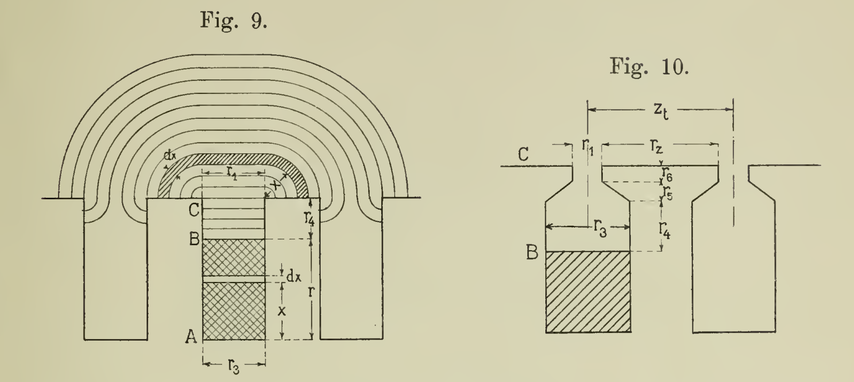
Φ_γ verläuft ausserhalb der Nut und umschlingt die Spule ganz.

Da der Widerstand des Eisens gegenüber dem der Luft wieder vernachlässigt werden kann, und die Nut der ganzen Breite nach bis

hinauf zu B vollständig von der Spulenseite erfüllt ist, so sind wir zur Annahme berechtigt, dass der Kraftlinienweg der Flüsse Φ_a und Φ_β

Fig. 9.

Fig. 10.



parallel zur Grundfläche der Nut verläuft. Die Leitfähigkeit des Streifens $d\,F_1$ ist

$$d\,F_1 = \frac{l\,d\,x}{r_1}$$

und die magnetomotorische Kraft desselben

$$\mathfrak{M}_1 = 0{,}4\,.\,\pi\,.\,w\,.\,\frac{x}{r}.$$

Dieser Streifen ist mit $w\,.\,\frac{x}{r}$ Windungen verkettet, folglich wird

$$L_a = \frac{0{,}4\,\pi}{10^8}\int_0^r \frac{w\,.\,x}{r}\,.\,\frac{w\,.\,x}{r}\,.\,\frac{l\,.\,d\,x}{r_3} = \frac{\mathbf{0{,}4\,\pi}}{\mathbf{10^8}}\,.\,\mathbf{w^2\,l}\,\frac{\mathbf{r}}{\mathbf{3\,r_3}}. \quad (10)$$

Für L_β erhält man

$$L_\beta = \frac{0{,}4\,\pi\,w^2}{10^8}\left[\int_0^{r_4}\frac{l\,.\,d\,x}{r_3} + \int_0^{r_5}\frac{l\,d\,x}{\frac{r_1 + r_3}{2}} + \int_0^{r_6}\frac{l\,d\,x}{r_1}\right],$$

$$\mathbf{L_\beta = \frac{0{,}4\,\pi\,.\,w^2\,.\,l}{10^8}\left[\frac{r_4}{r_3} + \frac{2\,r_5}{r_1 + r_3} + \frac{r_6}{r_1}\right]}. \quad . \quad . \quad (11)$$

Wenn die Nut offen ist, wird

$$r_1 = r_3 \quad r_5 = 0 \quad r_6 = 0 \quad r_4 = B\,C,$$

$$\mathbf{L_\beta = \frac{1{,}25\,w^2\,.\,l}{10^8}\,.\,\frac{r_4}{r_1}}.$$

Der Kraftfluss Φ_γ wird nicht die Nut durchsetzen, sondern sich nach den Zähnen ziehen (siehe Fig. 9). Beim Nutenanker wird deshalb die Leitfähigkeit für Φ_γ etwas kleiner sein als bei glatten Ankern. Der Unterschied ist jedoch so gering, dass wir ihn nicht zu berücksichtigen brauchen.

$$L_\gamma = \frac{0{,}4\,\pi\, w^2 l}{10^8} \int_0^{r_2 - \frac{r_1}{2}} \frac{d\,x}{r_1 + \pi\, x} = \frac{0{,}4\,\pi\, w^2 l}{10^8} \cdot \frac{2{,}3}{\pi} \lg \left[\frac{r_1 + \pi \left(r_2 - \frac{r_1}{2} \right)}{r_1} \right],$$

$$L = \frac{w^2 l \,.\, 0{,}92}{10^8} \lg \left(\frac{\pi \,.\, r_2}{r_1} - 0{,}57 \right),$$

wo

$$r_2 = \tau \,.\, \frac{p}{1+p}.$$

Da r_2 gegenüber r_1 sehr gross ist, so dürfen wir 0,57 vernachlässigen und bekommen

$$\mathbf{L_\gamma = \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 0{,}92}{10^8} \,.\, lg \left(\frac{\pi\, r_2}{r_1} \right)}. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

Wenn die Anzahl der Spulenseiten gleich 2 ist, was den meisten praktischen Fällen entspricht, so wird der Selbstinduktionskoeffizient L_1 des induzierten Teiles der Spule

$$L_1 = 2\,(L_\alpha + L_\beta + L_\gamma),$$

$$\mathbf{L_1} = \frac{w^2 \,.\, 2 l}{10^8} \left[1{,}25 \,.\, \left(\frac{r}{3\, r_3} + \frac{r_4}{r_3} + \frac{2\, r_5}{r_1 + r_3} + \frac{r_6}{r_1} \right) + 0{,}92 \lg . \left(\frac{\pi\, r_2}{r_1} \right) \right]$$

$$= \mathbf{\frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8}} \left[\lambda_n + \lambda_k \right],$$

wo

$$\lambda_n = 1{,}25 \left(\frac{r}{3\, r_3} + \frac{r_4}{r_3} + \frac{2\, r_5}{r_1 + r_3} + \frac{r_6}{r_1} \right); \ \lambda_k = 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi\, r_2}{r_1} \right);$$

$$r_2 = \tau \,.\, \frac{p}{1+p}.$$

Der Selbstinduktionskoeffizient der Stirnverbindungen wird nach der auf S. 8 angegebenen Formel 6 berechnet.

$$\mathbf{L_2} = \frac{w^2 \,.\, 2\, l_s}{10^8} \left[0{,}46 \,.\, \lg \frac{l_s}{d_s} - 0{,}11 \right] = \mathbf{\frac{w^2 \,.\, 2 \,.\, l_s}{10^8}}\, \lambda$$

und für die ganze Spule bekommen wir

$$L = L_1 + L_2 = \frac{w^2 . 2 . l}{10^8} \left[\lambda_n + \lambda_k + \frac{l_s}{l} \lambda_s\right]. \quad . \quad . \quad (13)$$

b) Eine Spulenseite ist auf mehrere nebeneinander liegende Nuten verteilt.

Nehmen wir an, eine Spulenseite sei gleichmässig auf q nebeneinanderliegende Nuten verteilt.

In Fig. 11 ist $q = 4$. Um den Selbstinduktionskoeffizienten L einer solchen Spule zu berechnen, verwenden wir den Satz von der Superposition. Wir fangen mit der Nut 1 an und berechnen den Kraftfluss, der nur von diesem Teil der Spulenseite erzeugt wird und nur mit diesem verkettet ist. Die Windungszahl pro Nut ist $\frac{w}{q}$.

Fig. 11.

$$L_1^1 = \frac{w^2 . 2 . l}{q^2 . 10^8} \left[1{,}25 \left(\frac{r}{3 r_3} + \frac{r_4}{r_3}\right) + 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi . z_t}{r_1}\right)\right].$$

Bei L_1^1 bedeutet der Index unten denjenigen Spulenteil, der den Kraftfluss erzeugt und der obere diejenigen Spulenteile, die von diesem umschlungen werden.

Für den Kraftfluss, welcher von den Ampèrewindungen der Nut 1 erzeugt wird und Nut 1 und 2 umschlingt, ist

$$L_1^{1+2} = \frac{w}{q} . 2 . \frac{w}{q} . \frac{2 l}{10^8} . 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi 2 z_t}{2 z_t}\right) = \frac{1{,}73 w^2 . l}{10^8 . q^2}.$$

Und für

$$L_1^{1+2+3} = \frac{w}{q} . 3 . \frac{w}{q} . \frac{2 l}{10^8} . 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi 3 z_t}{4 z_t}\right) = \frac{2{,}06 w^2 l}{10^8 . q^2}.$$

Allgemein

$$L_1^{1+2+\ldots x} = \frac{w}{q} . x . \frac{w}{q} . \frac{2 l}{10^8} . 0{,}92 \lg \left[\frac{\pi x}{2(x-1)}\right].$$

Wenn $x = q$ ist, so müssen wir integrieren bis $r_2 = \tau . \frac{p}{1+p}$,

$$L_1^{1+2+\ldots q} = \frac{w^2 l}{10^8} . 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi . \tau}{2(q-1)} . \frac{p}{1+p}\right).$$

Jetzt ermitteln wir die verschiedenen Kraftflüsse, die von der Spule 2 erzeugt werden und zwar gerade so wie vorhin bei der Spule 1.

$$L_2^{2} = \frac{w^2 . l}{q^2 . 10^8} \left[1{,}25\left(\frac{r}{3 r_1} + \frac{r_4}{r_1}\right) + 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi z_t}{r_1}\right)\right],$$

$$L_2^{1+2+3} = \frac{w^2 . l}{q^2 . 10^8} . 3 . 0{,}92 \lg (\pi),$$

$$L_2^{2+1+3+4} = \frac{w^2 . l}{q^2 . 10^8} . 4 . 0{,}92 \lg \left(\frac{3}{4} \pi\right),$$

$$L_2^{2+1+3+\ldots x} = \frac{w^2 . l}{q^2 . 10^8} . x . 0{,}92 . \lg \left[\frac{x(x-1)}{2(x-2)}\right],$$

$$L_2^{2+1+3+\ldots q} = \frac{w^2 . l}{q^2 . 10^8} . q . 0{,}92 \lg \left[\frac{\pi}{2(q-2)} . \tau . \frac{p}{1+p}\right].$$

Indem wir so fortfahren, die verschiedenen L für alle q Teile der Spulenseite zu ermitteln und diese dann addieren, bekommen wir den Selbstinduktionskoeffizienten der ganzen Spulenseite. Eine allgemeine einfache Formel, welche alle diese L in sich einschliesst, lässt sich nicht aufstellen. Es ist am einfachsten, diese verschiedenen L in der angedeuteten Weise einzeln zu berechnen und dann zu addieren. Indem wir noch die Summe mit der Anzahl der Spulenseiten multiplizieren und den Selbstinduktionskoeffizienten sämtlicher Stirnverbindungen hinzu addieren, erhalten wir den Selbstinduktionskoeffizienten der ganzen Spule.

Dadurch, dass die Spulenseite auf q Nuten verteilt ist, wird der Selbstinduktionskoeffizient der ganzen Spule kleiner, als wenn sämtliche Windungen einer Spulenseite in derselben Nut liegen würden. Im letzteren Falle erhält man für die Verkettung des Kraftflusses in der Nut

$$L = \frac{w^2 . l}{10^8} [\lambda_n],$$

und wenn eine Spulenseite auf q Nuten verteilt ist

$$L = \frac{w^2 . l}{q^2 . 10^8} q . \lambda_n = \frac{w^2 l}{10^8} \frac{\lambda_n}{q} = \frac{w^2 . l}{10^8} \lambda_n' \quad . \; . \; . \quad (14)$$

λ_n', d. h. die Leitfähigkeit pro Centimeter Armaturlänge oder der Kraftfluss pro A.W. und pro Centimeter Armaturlänge ist q mal kleiner geworden. Die Verkettung des Kraftflusses ausserhalb der

Nut ist, wenn die Spulenseite in q Nuten liegt, auch kleiner, als wenn alle ihre Windungen sich in einer Nut befinden; denn ein Teil des Kraftflusses umschlingt nicht alle Windungen, wie dies der Fall wäre, wenn die ganze Spulenseite in einer Nut liegen würde. Dieses Sinken von λ_n' mit Grösserwerden von q ist von Parshall und Hobart experimentell sehr schön nachgewiesen worden (siehe S. 57 u. f.).

c) Mehrere Spulenseiten pro Nut.

In diesem Falle wird der Kraftfluss, der von einer Spulenseite erzeugt wird, nicht mehr den einfachen Verlauf haben, wie vorhin, wo die Nut von der Spulenseite ganz erfüllt war. Um das richtige Kraftlinienbild zu bekommen, müsste man nach dem Gefühl verschiedene solche Bilder entwerfen, und dasjenige als das richtige annehmen, das die grösste magnetische Leitfähigkeit besitzt. Eine solche Ermittelung von L ist aber sehr umständlich und zeitraubend. Um doch rasch die Selbstinduktion der in der Nut gelegenen Spulenseite zu erhalten, nehmen wir daher denselben Verlauf des Kraftflusses wie in Fig. 9 an; dadurch erhalten wir allerdings einen etwas zu kleinen Wert, was auch die spätere experimentelle Untersuchung bestätigen wird. Unter dieser Annahme wird der Selbstinduktionskoeffizient der in der Nut gelegenen Spulenseite

$$L_1 = \frac{w^2 . l}{10^8} \left[1{,}25 \left(\frac{r}{3 r_3} + \frac{r_4}{r_3} + \frac{2 r_5}{r_1 + r_3} + \frac{r_6}{r_1}\right) + 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi r_2}{r_1}\right)\right],$$

wo

$$r_2 = \tau . \frac{p}{1 + p}$$

bedeutet.

II. Berechnung des gegenseitigen Induktionskoeffizienten M.

Den gegenseitigen Induktionskoeffizienten M zweier Spulen erhalten wir, indem wir die gemeinsame Kraftflussverkettung berechnen, die entsteht, wenn in einer der beiden Spulen ein Strom von 1 Ampère fliesst. Die Annahmen über den Verlauf des Kraftflusses, der von einer Spule erzeugt wird, sollen dieselben sein wie früher.

1. Die zwei Spulen sind in derselben Nut.

a) Uebereinander (siehe Fig. 12).

Wenn nun in einer der beiden Spulen ein Strom von 1 Ampère fliesst, so ist die Kraftflussverkettung der beiden Spulen für $u = 2$

$$M = \frac{0{,}4 \,.\, \pi \,.\, w}{10^8} \, l \,.\, 2 \,.\, \int_0^r \frac{w}{r} x \,.\, \frac{dx}{r_1} + \frac{0{,}4\, \pi \,.\, 2}{10^8} \,.\, w^2 \,.\, l \,.\, \frac{r_4}{r_1}$$

$$+ \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8} \, 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi \,.\, \tau \dfrac{p}{1+p}}{r_1} \right),$$

$$M = \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8} \left[\frac{1{,}25\, r}{2\, r_1} + \frac{1{,}25\, r_4}{r_1} + 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi \,.\, \tau \dfrac{p}{1+p}}{r_1} \right) \right],$$

$$\mathbf{M = \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8} \left[\frac{1{,}25}{r_1} \left(\frac{r}{2} + r_4 \right) + 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi \,.\, \tau \dfrac{p}{1+p}}{r_1} \right) \right]} . \quad (15)$$

Fig. 12.

Fig. 13.

b) N e b e n e i n a n d e r (siehe Fig. 13).

Hier erhalten wir für M

$$\mathbf{M = \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8} \left[1{,}25 \left(\frac{r}{3\, r_1} + \frac{r_4}{r_1} + 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi \,.\, \tau \dfrac{p}{1+p}}{r_1} \right) \right]} . \quad (16)$$

2. Die zwei Spulen liegen in verschiedenen Nuten (siehe Fig. 14).

In diesem Falle wird M

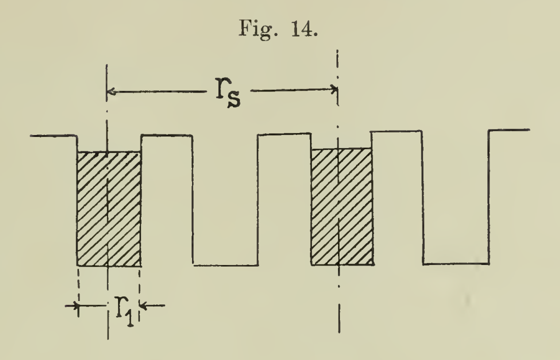
$$M = \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8} \,.\, 0{,}92 \left[\lg \left(\frac{\pi\, r_2}{r_1} - 0{,}57 \right) - \lg \left(\frac{\pi\, r_s}{r_1} - 0{,}57 \right) \right],$$

$$M = \frac{w^2 \,.\, l \,.\, 2}{10^8} \,.\, 0{,}92 \left[\lg \frac{\pi \,.\, \tau \dfrac{p}{1+p} - r_1 \,.\, 0{,}57}{\pi \,.\, r_s - r_1 \,.\, 0{,}57} \right].$$

Wenn wir $r_1 . 0{,}57$ vernachlässigen, erhalten wir

$$M = \frac{w^2 . l . 2}{10^8} 0{,}92 \left[\lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

Fig. 14.



3. Die zwei Spulen sind je auf mehrere Nuten verteilt.

Um den gegenseitigen Induktionskoeffizienten bei dieser Anordnung zu erhalten, verfahren wir wie auf S. 17. Man bestimmt die Kraftflüsse der einzelnen, in verschiedenen Nuten gelegenen Teile der einen Spule und deren Verkettungen mit der anderen Spule. Die Summe dieser Verkettungen ergibt dann den gesuchten gegenseitigen Induktionskoeffizienten M der beiden Spulen.

4. Es liegen mehrere Spulenseiten in derselben Nut.

Wenn die Spulenseiten von mehreren gleichzeitig kurzgeschlossenen Spulen in derselben Nut liegen, so bekommen wir den gegenseitigen Induktionskoeffizienten einer Spulenseite mit allen übrigen, wenn wir die Kraftflussverkettung dieser Spulenseite mit jeder anderen einzeln berechnen und alle addieren. Da die Berechnung dieser Verkettung ganz ähnlich den früheren ist, so wird es nicht notwendig sein, dieselbe hier nochmals besonders durchzuführen.

III. Berechnung des scheinbaren Selbstinduktionskoeffizienten L_s.

Der scheinbare Selbstinduktionskoeffizient L_s kann nur angenähert nach der Formel

$$L_s = L - \Sigma\left(\frac{M^2}{L}\right)$$

berechnet werden. Eine genauere Bestimmung desselben lässt sich nicht angeben, da durch die dämpfende Wirkung der kurzgeschlossenen Spulen das Feld so deformiert wird, dass es der Rechnung nicht mehr gut zugänglich ist.

B. Experimentelle Bestimmung der Induktionskoeffizienten.

Die experimentelle Untersuchung von L und M hat ergeben, dass die oben berechneten Werte zum Teil sehr gut mit den experimentell ermittelten übereinstimmen, zum Teil einige Abweichungen zeigen, die aber nicht bedeutend sind. Eine so gute Uebereinstimmung konnte kaum erwartet werden, da die Kraftflussverteilung in Wirklichkeit doch viel komplizierter ist, als hierfür die Berechnung angenommen wurde und sehr stark beeinflusst und verzerrt wird durch die in den massiven Eisenteilen induzierten Wirbelströme.

1. Der Selbstinduktionskoeffizient L von Ankerspulen.

Der Selbstinduktionskoeffizient L lässt sich am besten mit Wechselstrom bestimmen. Es ist

$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (2\pi c L)^2}},$$

J_1 = effektive Stromstärke in Ampère,
E_1 = effektive Spannung in Volt,
R = Ohmscher Widerstand,
c = Periodenzahl des Wechselstromes,
L = Selbstinduktionskoeffizient der Ankerspule in Henry.

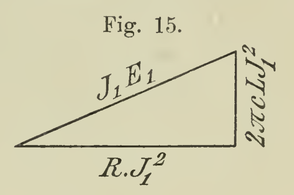
E_1, J_1 und R können wir messen, c ist uns aus der Tourenzahl und Polzahl gegeben, folglich bleibt nur noch L als Unbekannte.

$$L = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot c} \sqrt{\left(\frac{E_1}{J_1}\right)^2 - R^2}.$$

Da sich in der Nähe der Spule, deren Selbstinduktionskoeffizient wir bestimmen wollen, Eisen befindet, so wird die Genauigkeit der Messung sehr beeinträchtigt werden; denn es wird nicht nur im Stromkreise Energie verbraucht, sondern auch im benachbarten Eisen. Dieser zur Jouleschen Wärme des Stromkreises hinzu gekommene Energieverlust rührt von der magnetischen Hysteresis des Eisens und den in ihm und in der Leitung auftretenden Wirbelströmen her. Diese Erhöhung des Energieverlustes können wir dadurch berücksichtigen, dass

wir statt des Ohmschen Widerstandes den sogenannten effektiven Widerstand einführen, der dann ein Mass für den ganzen Energieverbrauch, sowohl im Stromkreis als auch ausserhalb desselben ist, während der Ohmsche Widerstand uns nur die Joulesche Wärme im Stromkreis allein gibt. Der Ohmsche Widerstand ist eine Konstante des Stromkreises, die nur von der Temperatur abhängt; der effektive Widerstand ist grösser als der Ohmsche. Probeversuche ergaben, dass er um ca. 8 bis 10 % grösser war als der Ohmsche, was den Wert von L merklich beeinflusst. Der effektive Widerstand ist keine Konstante des Stromkreises, sondern hängt vom Strome und der Periodenzahl desselben ab. Um den Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule genau zu bekommen, müssen wir daher den effektiven Widerstand berücksichtigen und zwar geschieht dies dadurch, dass wir ausser der Messung des Stromes und der Spannung noch den zugehörigen Wattverbrauch W der Spule ermitteln. Es ist

Fig. 15.



$$J_1 = \frac{E_1}{\sqrt{R^2 + (2\pi c L)^2}},$$

$$J_1 \cdot E_1 = J_1^2 \cdot \sqrt{R^2 + (2\pi c L)^2} = \sqrt{(J_1^2 R)^2 + (2\pi c L J_1^2)^2},$$

$$(J_1^2 R)^2 + (2\pi c L J_1^2)^2 = (J_1 \cdot E_1)^2.$$

$J_1^2 \cdot R$ ist die Wattkomponente,

$2\pi c L J_1^2$ ist die wattlose Komponente des Energiedreiecks (Fig. 15).

$R J_1^2$ ist gleich dem gemessenen Gesamtenergieverbrauch W. Wir erhalten nun für L

$$L = \frac{\sqrt{(J_1 \cdot E_1)^2 - W^2}}{2\pi c J_1^2}.$$

Dieser Ausdruck lässt sich noch vereinfachen, indem wir die Phasenverschiebung φ einführen. Es ist

$$\frac{W}{J_1 \cdot E_1} = \cos\varphi;$$

oben eingesetzt, ergibt

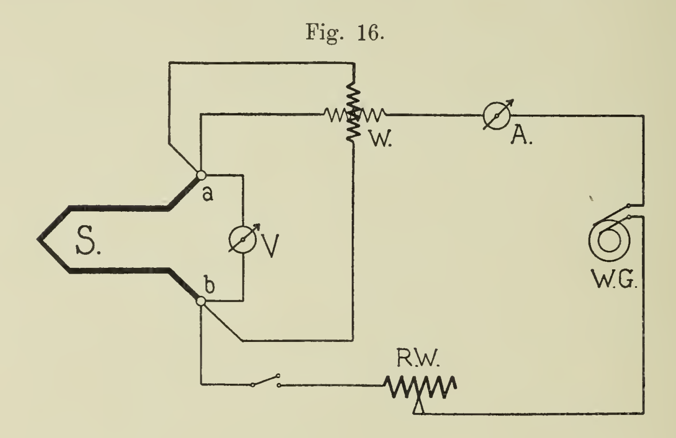
$$\mathbf{L} = \frac{J_1 \cdot E_1 \sqrt{1 - \cos^2\varphi}}{2\pi c J_1^2} = \frac{\mathbf{E_1 \cdot \sin\varphi}}{\mathbf{2\pi c J_1}}. \quad . \quad . \quad (18)$$

In Fig. 16 ist das Schaltungsschema für die experimentelle Bestimmung von L angegeben.

S = Spule, deren Selbstinduktionskoeffizient zu messen ist,
a und b = Enden der Spule S,
V = Voltmeter,
W = Wattmeter,
A = Ampèremeter,
RW = Regulierwiderstand,
WG = Wechselstromgenerator.

Als Ampèremeter wurde ein Hitzdrahtampèremeter von Hartmann & Braun mit einem Messbereich von 35 Ampère verwendet,

Fig. 16.



das im Laufe der Untersuchungen mehrmals mit Gleichstrom geaicht wurde.

Zur Messung der Spannung wurde ein Westonvoltmeter für Wechselstrom benutzt, das durch Umstöpseln auf zwei Messbereiche geschaltet werden konnte, nämlich auf 0,5 bis 7,5 und auf 1 bis 15 Volt. Mittels eines Kompensators von Siemens & Halske wurde dieses Instrument zweimal geaicht. Die kleinen Spannungen der gegenseitigen Induktion wurden mit einem Elektrometer von Carpentier ermittelt.

Als Wattmeter kam ein Torsionsdynamometer von Siemens & Halske zur Anwendung. Geaicht wurde es mit der Stromwage und zwar für den Messbereich und dieselben Verhältnisse, wie sie bei den Untersuchungen in Frage kamen.

Der Strom, der in der Spule S fliesst, ist genau genommen gleich dem Strome, der durch das Ampèremeter geht, vermindert

um die Ströme der Spannungsspule des Wattmeters und des Voltmeters. Da aber diese Ströme gegenüber dem Gesamtstrome J_1 ausserordentlich klein sind, so darf man sie vernachlässigen.

2. Der gegenseitige Induktionskoeffizient M von Ankerspulen.

Den gegenseitigen Induktionskoeffizienten zweier Spulen erhalten wir, indem wir durch die eine Spule einen Strom von bekannter Grösse und Periodenzahl (J_1, c) hindurchschicken und die induzierte Spannung in der zweiten Spule messen; diese sei gleich E_2. Dann ist der gegenseitige Induktionskoeffizient der beiden Spulen

$$M = \frac{E_2}{2 \pi c J_1}.$$

Das Messinstrument für E_2 muss einen möglichst grossen Widerstand haben, damit der Voltmeterstrom sehr klein ist, und dessen dämpfende Wirkungen die Messung praktisch nicht beeinflussen können.

3. Der scheinbare Selbstinduktionskoeffizient L_s von Ankerspulen.

Bei der experimentellen Bestimmung des scheinbaren Selbstinduktionskoeffizienten L_s verfahren wir genau so, wie bei der Bestimmung von L. Der Unterschied besteht nur darin, dass wir diejenigen Spulen, bezüglich welchen wir den scheinbaren Selbstinduktionskoeffizienten L_s einer Spule bestimmen wollen, kurz schliessen.

I. Untersuchung der Induktionskoeffizienten an einer Gleichstrommaschine von Geist.

Diese Maschine ist in Fig. 17 skizziert. Ihre wichtigsten Abmessungen sind:

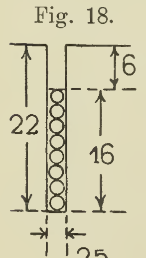
Durchmesser der Armatur	122,8 mm
Durchmesser des Feldes	125,2 „
Länge der Armatur	166,0 „
Anzahl der Nuten	60
Abmessungen einer Nut (siehe Fig. 18)	
Ankerwickelung	Schleifenwickelung
Spulenseiten pro Nut	1
Anzahl der Spulen	30
Wickelungsschritte	$y_1 = 27$
	$y_2 = 29$
Anzahl der Windungen pro Nut	8
Kollektorlamellenzahl	30

Um den Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule zu untersuchen, lösen wir die Verbindungen derselben mit dem Kollektor; dadurch wird

Fig. 17.

die übrige Wickelung geöffnet. Nun schicken wir durch die Spule einen Wechselstrom von bestimmter Periodenzahl; durch Strom-, Spannungs- und Wattmessung lässt sich dann L in oben angegebener Weise leicht bestimmen. Die Ermittelung von L geschieht zuerst für den Fall, dass sich die Armatur ausserhalb des Feldes befindet.

Fig. 18.



1. Die Armatur ist aus dem Felde herausgenommen.

Bevor wir den Selbstinduktionskoeffizienten definitiv bestimmen, wollen wir zuerst die Abhängigkeit desselben vom Strome und der Periodenzahl feststellen. Es zeigte sich, dass L für Perioden von c = 30 bis 150 und Ströme von 15 bis 30 Ampère konstant bleibt. Der Grund hierfür liegt darin, dass der von der Spule

erzeugte Kraftfluss teilweise durch die Luft verläuft; infolgedessen ist die Sättigung der Zähne sehr gering und somit konstant.

Wenn der Kraftfluss nicht ganz im Eisen verläuft, sondern wenn der Weg desselben durch eine Luftstrecke, die 1 % vom Weg im Eisen ausmacht, unterbrochen ist, so bleibt der gesamte magnetische Widerstand praktisch konstant, vorausgesetzt, dass die Sättigung des Eisens noch nicht erreicht ist. In unserem Falle ist der Luftzwischenraum, den der Kraftfluss passieren muss, im Verhältnis zum mittleren Weg im Eisen aber erheblich grösser als 1 %.

Der mittlere Kraftlinienweg im Eisen beträgt ungefähr 30 mm.

Der Luftzwischenraum ist 2,5 mm oder 8,3 % vom Weg im Eisen.

L ist also für Werte von J, welche das Eisen in den Zähnen noch nicht sättigen, konstant, was auch die Untersuchung bestätigt hat.

Für den Selbstinduktionskoeffizienten L einer Ankerspule der Maschine von Geist haben sich für den Fall, dass der Anker sich in Luft befindet, folgende Werte ergeben:

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	L
15,2	1,22	13,5	18,8	0,750	0,661	0,000164
20,5	1,59	24,1	31,9	0,756	0,656	0,000165
24,8	1,99	37,4	49,4	0,757	0,655	0,000165

Die Periodenzahl des Wechselstromes ist für alle Untersuchungen, wenn nichts Specielles bemerkt wird, stets 50.

Wenn wir L dieser Spule nach Formel 13 S. 391

$$L = \frac{w^2 . 2 . l}{10^8} \left[\lambda_n + \lambda_k + \frac{l_s}{l} . \lambda_s \right]$$

berechnen, erhalten wir

$$\lambda_n = 1,25 \left(\frac{r}{3 r_1} + \frac{r_4}{r_1} \right) = 1,25 \left(\frac{17}{7,5} + \frac{5}{2,5} \right) = 1,25 . 4,27 = \mathbf{5,33},$$

$$\lambda_k = 0,92 . \lg \left(\frac{\pi r_2}{r_1} \right); \quad r_2 = \tau . \frac{p}{1+p} = \frac{1}{2} \pi r_a,$$

$$r_2 = \frac{3,14 . 61.4}{2} = 96,5 \text{ mm},$$

$$\lambda_k = 0,92 \lg \frac{303}{2,5} = 0,92 . 2,084 = \mathbf{1,91},$$

$$\lambda_s = 0{,}46 \lg \frac{l_s}{d_s} - 0{,}1 ; \quad l_s = 150 \text{ mm}, \; d_s = 11{,}8 \text{ mm},$$

$$\frac{l_s}{l} \cdot \lambda_s = \frac{150}{167} \left[0{,}46 \lg \frac{150}{11{,}8} - 0{,}1\right] = 0{,}9 \cdot 0{,}51 = \mathbf{0{,}45},$$

$$L = \frac{8^2}{10^8} \cdot 2 \cdot 16{,}6 \, [5{,}33 + 1{,}91 + 0{,}45] = \frac{8^2}{10^8} \cdot 2 \cdot 16{,}6 \cdot 7{,}7 = \mathbf{0{,}000163}.$$

Hieraus ersieht man, dass die von Arnold aufgestellte Formel zur Berechnung von L bei schmalen und tiefen Nuten Werte ergibt, die mit den experimentell ermittelten mit grosser Genauigkeit übereinstimmen.

2. Der Anker befindet sich im Felde.

a) Das Feld ist unerregt und die Erregerentwickelung offen.

Der Anker ist im Felde so gelagert, dass die beiden Spulenseiten zwischen die Pole zu liegen kommen (siehe Fig. 17, Lage 0^0). Wenn wir nun durch die Spule einen Wechselstrom hindurchschicken, so erhalten wir folgenden Wert:

$$L = 0{,}000210.$$

Diese Vergrösserung von L rührt daher, dass zu dem früheren Kraftfluss noch ein neuer hinzugekommen ist, der sich durchs Feld schliessen kann. Bevor wir aber auf die Grösse desselben näher eingehen, wollen wir zuerst die Aenderung des Selbstinduktionskoeffizienten einer Ankerspule verfolgen, die eintritt, wenn der Anker gedreht wird. Die verschiedenen Lagen der Spule, bei welchen wir L gemessen haben, sind in Fig. 17 markiert. 0^0 ist die Anfangsstellung der Spule. In dieser Lage steht die Ebene derselben senkrecht zur Achse der Pole. Wenn α den Winkel bedeutet, um welchen die Ebene der Spule von der Anfangsstellung abweicht, so ergeben sich für die verschiedenen Werte von α folgende L:

J_1	E_1	W	$J_1 \cdot E_1$	cos φ	sin φ	L	α
18,95	1,75	22,8	33,2	0,687	0,726	0,000210	0
18,9	1,74	22,8	32,9	0,694	0,719	0,000210	10
18,9	1,74	22,5	32,9	0,684	0,729	0,000210	20
18,7	1,71	22,5	32,0	0,702	0,712	0,000207	30
18,7	1,70	22,5	31,8	0,708	0,706	0,000204	40
18,7	1,72	22,5	32,2	0,699	0,715	0,000209	50

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L	α
18,6	1,88	22,5	35,0	0,643	0,766	0,000247	60
18,6	2,04	23,3	38,0	0,613	0,790	0,000276	65
18,5	2,24	24,8	41,5	0,597	0,802	0,000303	70
18,5	2,44	25,6	45,2	0,566	0,824	0,000346	75
18,45	2,56	26,4	47,4	0,558	0,830	0,000381	80
18,4	2,69	27,2	49,5	0,550	0,836	0,000388	85
18,3	2,78	27,9	50,5	0,552	0,834	0,000402	90
18,05	2,76	27,3	49,7	0,550	0,836	0,000408	95
18,0	2,78	27,5	50,0	0,550	0,836	0,000412	100
18,0	2,82	26,8	50,6	0,530	0,848	0,000416	105
18,1	2,79	26,0	50,5	0,515	0,857	0,000416	110
18,0	2,51	23,4	45,2	0,518	0,856	0,000380	120
18,0	2,18	22,5	39,3	0,573	0,819	0,000316	125
18,1	1,76	21,4	32,2	0,665	0,747	0,000235	140

Diese Werte sind in Fig. 19 (Kurve A) graphisch aufgetragen. Aus derselben ersieht man, dass L bis zu 20° konstant bleibt, dann etwas sinkt und hierauf rasch zunimmt. Der Grund für diese Abnahme von L zwischen 20° und 50° liegt darin, dass in der Nulllage der Spule ihre magnetische Leitfähigkeit wegen der Nähe des Joches etwas erhöht wird. Indem wir nun den Anker drehen, entfernen sich die Spulenseiten vom Joch, die magnetische Leitfähigkeit wird etwas geringer und nimmt erst wieder zu, wenn die Spulenseiten sich den Polecken wieder nähern. Von hier ab wächst L rasch zu einem Maximum an. Diese erhebliche Vergrösserung von L, wenn die Spulenseiten unter die Pole gelangen, rührt davon her, dass die magnetische Leitfähigkeit sich bedeutend erhöht hat, denn abgesehen vom Luftzwischenraum zwischen Anker und Pol, sind die Spulenseiten ganz von Eisen umgeben. Da die Ankerspule nicht genau Durchmesserspule ist, so tritt das Maximum von L nicht schon bei 90°, sondern erst bei etwa 105° ein. Wenn wir noch weiter drehen, fällt die Kurve rasch ab.

b) Das Feld ist normal erregt.

Dann ergeben sich folgende Werte:

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L	α
18,0	1,52	18,2	27,4	0,667	0,745	0,000203	0
18,1	1,53	18,2	27,7	0,658	0,753	0,000202	10

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L	α
18,2	1,54	18,2	28,0	0,650	0,759	0,000204	20
18,1	1,54	18,2	27,9	0,652	0,758	0,000205	30
18,1	1,54	18,2	27,9	0,652	0,758	0,000205	40
18,0	1,43	17,4	25,8	0,674	0,739	0,000187	50
18,0	1,38	17,4	24,8	0,701	0,713	0,000174	58
18,0	1,36	17,4	24,5	0,711	0,703	0,000170	64
18,1	1,36	17,8	24,6	0,724	0,699	0,000169	70
18,35	1,39	19,0	25,5	0,745	0.667	0,000169	75
18,5	1,44	19,4	26,7	0,728	0,685	0,000170	80
18,6	1,47	20,2	27,4	0,738	0,674	0,000170	85
18,6	1,48	20,2	27,6	0,733	0,680	0,000172	90
18,6	1,48	20,2	27,6	0,733	0,680	0,000172	100
18,3	1,46	19,8	27,2	0,728	0,685	0,000174	110

Dadurch, dass man das Feld erregt, sinkt also der Wert von L in der Nulllage von 0,000210 auf 0,000203 ab. Wie obige Tabelle zeigt, nimmt L von 0 bis 40° ein wenig zu und fällt dann, sobald die Spule in den Bereich des Poles kommt, wieder sehr rasch ab bis zu einem Minimalwert von L = 0,000169. Dieses starke Fallen rührt von der Sättigung der Zähne und des Ankereisens her, die den magnetischen Widerstand im Eisen bedeutend erhöht, und somit L sinken macht (siehe Fig. 19, Kurve B).

Wie wir vorhin schon bemerkt haben, schliesst ein Teil des Kraftflusses sich durchs Joch und zwar ist dessen Grösse abhängig

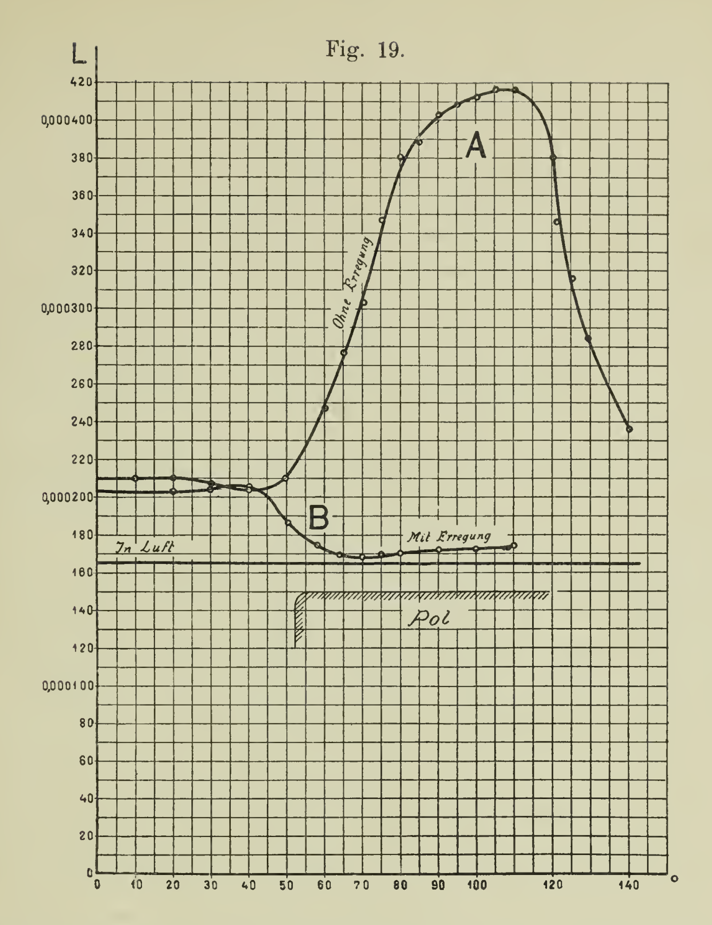
1. von der Lage der Spule gegenüber dem Pol.

In der Nulllage wird er den grössten Wert haben, und wenn die Ebene der Spule parallel zur Achse der Pole ist, so wird er praktisch gleich Null sein.

2. Von der Periodenzahl.

Der wechselnde Kraftfluss, der durch das Feld sich schliesst, erzeugt in den massiven Eisenkernen im Joch und in der Erregerwickelung, wenn diese geschlossen ist, Wirbelströme, die auf den eintretenden Kraftfluss dämpfend zurückwirken und ihn dadurch zum grössten Teil vernichten. Und da die Wirbelströme mit der Periodenzahl proportional zunehmen, so wird der Kraftfluss, der sich durch das Joch schliesst, um so mehr reduziert, je grösser die Periodenzahl ist. Der Selbstinduktionskoeffizient der Ankerspule wurde bei einer Periodenzahl von c = 50 ermittelt. In Wirklichkeit ist dieselbe bei dieser Maschine gleich 425. Der Wert L = 0,000210, den die Spule

Fig. 19.



in der Nulllage bei c = 50 besitzt, wird somit zu gross sein. Bei vorliegendem Versuch war es leider nicht möglich, den Selbstinduktionskoeffizienten der Ankerspule in der Nulllage bei einer Periodenzahl von c = 425 zu bestimmen; man musste sich mit einem c = 150 begnügen. Bei dieser Periodenzahl ergab sich:

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
11,3	2,12	12,2	23,9	0,510	0,860	0,000172
15,1	2,81	23,2	42,5	0,546	0,847	0,000173

Anker ausserhalb des Feldes:

Bei c = 50 ist L = 0,000165
„ c = 150 „ L = 0,000164

Anker im Feld:
Bei $c = 50$ ist $L = 0{,}000210$
„ $c = 150$ „ $L = 0{,}000173$

Bis jetzt haben wir L für den Fall bestimmt, dass das Feld offen ist. Beim Betriebe ist es aber an die Klemmen der Maschine angeschlossen. Da der Widerstand des Ankers im Verhältnis zu dem der Erregerspulen klein ist, so müssen die letzteren den oben erwähnten Kraftfluss durch die Magnete und durch das Joch noch mehr dämpfen. Um diesen Fall, der beim Betriebe eintritt, zu untersuchen, können wir die Erregung durch einen Widerstand, den wir allmählich auf Null herabsinken lassen, kurz schliessen, und erhalten dann folgende Werte:

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	$\cos\varphi$	$\sin\varphi$	Nulllage der Spule		
						R	L	c
22,0	2,04	32,0	44,9	0,713	0,711	∞	0,000210	50
22,1	1,86	30,1	41,1	0,732	0,681	412	0,000182	50
22,0	1,84	29,6	40,5	0,731	0,682	118	0,000181	50
22,0	1,81	28,6	39,8	0,733	0,675	0	0,000178	50
12,1	2,33	16,1	28,3	0,569	0,823	0	0,000168	**150**

Wenn wir mit der Periodenzahl noch höher gehen könnten, so müsste L noch mehr sinken. Für $c = 425$ wird die dämpfende Wirkung des massiven Eisens und der Erregerwickelung so gross sein, dass der Kraftfluss durch das Feld verschwindend klein wird und somit L der Spule im Felde (Nulllage) den Wert von L derselben Spule, für den Fall, dass der Anker sich in der Luft befindet, annehmen muss. Unter Umständen wird vielleicht L der Spule im Felde noch kleiner, weil ein Teil des Kraftflusses, der teilweise ausserhalb des Ankers verläuft und die Pole trifft, auch noch etwas gedämpft wird. Die Schwächung wird aber nicht gross sein; denn erstens ist dieser Kraftfluss infolge des grossen Luftweges klein und zweitens ist der Weg durch das massive Eisen verhältnismässig kurz. Somit dürfen wir mit grosser Sicherheit den wichtigen Schluss ziehen, dass der Selbstinduktionskoeffizient L einer Ankerspule im neutralen Felde denselben Wert hat, wie wenn der Anker ausserhalb des Feldes, d. h. in Luft sich befinden würde.

Dieses Resultat ermöglicht es uns, den Selbstinduktionskoeffizienten und den gegenseitigen Induktionskoeffizienten mit grosser Ge-

nauigkeit voraus zu berechnen. Und durch diese Untersuchung ist nun die Frage, ob ein Teil des Kraftflusses, der von der kommutierenden Spule erzeugt wird, durch das Feld geht oder nicht, definitiv entschieden worden. Die Annahme von Arnold, dass das Feld den Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule praktisch nicht beeinflusst, hat sich somit als richtig erwiesen, dagegen ist die Behauptung von Fischer-Hinnen, dass ein Teil des Kraftflusses einer kommutierenden Ankerspule, den er durch den Faktor K_1 berücksichtigt, durch das Feld geht, unrichtig [1]).

Bis jetzt haben wir den Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule genau untersucht. In Wirklichkeit kommutiert aber nicht nur eine Spule allein, sondern mehrere, deren Zahl von der Anzahl und Breite der Bürsten abhängt. Diese kommutierenden Spulen beeinflussen sich mehr oder weniger gegenseitig, je nachdem ihre Seiten direkt nebeneinander liegen oder voneinander entfernt sind. Auch kommt noch in Betracht, ob die Kommutation für die Spulen gleichzeitig erfolgt oder nicht. Im ersteren Falle wird die Selbstinduktion der Spule erhöht, im letzteren dagegen findet bei verschiedener Variation des Stromes in den einzelnen Spulen eine gegenseitige Dämpfung statt. Bei der Geist-Maschine liegen die Spulenseiten der zwei kurzgeschlossenen Spulen in benachbarten Nuten. Schaltet man dieselben derart hintereinander, dass beim Hindurchschicken eines Wechselstromes die benachbarten Spulenseiten die gleiche Stromrichtung haben, so wird die gegenseitige Induktion der beiden Spulen auf die Selbstinduktion einer Spule verstärkend wirken. Den durch M vergrösserten Selbstinduktionskoeffizienten einer Spule wollen wir als den erhöhten Selbstinduktionskoeffizienten L_e bezeichnen. Im vorliegenden Falle wurde L_e in verschiedenen Stellungen des Feldes durch Strom-, Spannungs- und Wattmessung ermittelt und folgende Werte dafür gefunden:

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_e	α
17,5	2,05	23,1	35,8	0,645	0,746	0,000278	0
17,5	2,03	23,1	35,5	0,652	0,759	0,000280	20
17,4	2,11	24,0	36,8	0,651	0,759	0,000283	40
17,6	2,16	24,4	38,0	0,640	0,768	0,000299	50

[1]) Siehe Fischer-Hinnen, Berechnung und Konstruktion elektrische Gleichstrommaschinen. IV. Aufl. S. 214.

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_e	α
17,5	2,33	24,4	40,8	0,596	0,803	0,000341	60
17,4	2,98	26,1	51,8	0,502	0,865	0,000469	70
17,2	3,23	28,1	55,5	0,506	0,862	0,000513	75
17,0	3,43	28,1	58,4	0,481	0,876	0,000563	80
17,0	3.62	29,9	61,5	0,486	0,874	0,000591	85
16,95	3,70	30,7	62.7	0,490	0,872	0,000605	90
16,95	3,83	31,4	64,8	0,484	0,875	0,000613	95
16,9	3,83	31,4	64,5	0,485	0,875	0,000630	100
17,0	3,70	30,1	62,9	0,478	0,878	0,000605	110
16,9	3,25	26,8	55,0	0,487	0,873	0,000535	120
17,1	2,63	24,4	45,0	0,541	0,841	0,000412	130

In Fig. 20, Kurve I, sind diese Werte graphisch aufgezeichnet. Bis 30⁰ bleibt L_e konstant, beginnt dann bald rasch zu steigen und erreicht bei ca. 100⁰ den Maximalwert, um wieder zu fallen. Das Anwachsen von L_e, sobald die Spulen in die Nähe der Pole kommen, ist auf die Vergrösserung der magnetischen Leitfähigkeit zurückzuführen.

Der erhöhte Selbstinduktionskoeffizient L_e, der hier für $c = 50$ ermittelt wurde, setzt sich zusammen aus dem Selbstinduktionskoeffizienten der Spule vermehrt um den gegenseitigen Induktionskoeffizienten. Nach S. 21 ist:

$$M = \frac{w^2 l . 2}{10^8} . 0,92 \lg \left(\frac{r_2}{r_s}\right); \quad r_2 = \tau . \frac{p}{1 + p}.$$

Da $p = 1$ ist, wird

$$r_2 = \frac{\pi D}{4} = 96,7; \quad r_s = \frac{122,8 . \pi}{60} = 6,42,$$

$$M = \frac{1,84 . 64}{108} . 16,7 \lg \frac{96,7}{6,42} = \mathbf{0,0000355.}$$

Für die Nulllage ergibt sich:

$$L_e = 0,000210 + 0,0000355 = 0,000246.$$

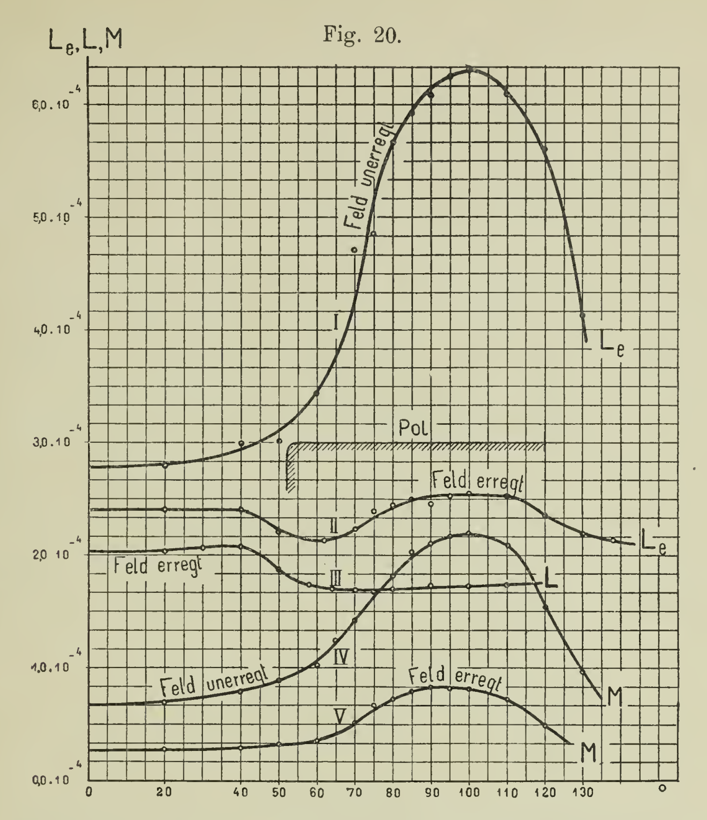
Hierzu kommt noch der Kraftfluss der zweiten Spule, der durch das Feld geht, und die erste auch umschlingt. Für $c = 50$ ist der Wert desselben

$$0,000210 - 0,000165 = 0,0000450.$$

Somit wird

$$L_e = 0,000291.$$

Fig. 20.



Dieser Wert stimmt mit dem experimentell ermittelten sehr gut überein.

Bei erregtem Feld erhalten wir für die verschiedenen Stellungen folgende Werte:

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_e	α
17,4	1,66	18,0	28,9	0,621	0,783	0,000238	0
17,5	1,66	18,0	29,1	0,618	0,786	0,000238	20
17,4	1,66	18,0	28,9	0,621	0,783	0,000238	40
17,4	1,54	18,0	27,6	0,652	0,759	0,000220	50
17,5	1,58	18,8	27,6	0,680	0,733	0,000211	62
17,5	1,65	19,8	29,2	0,677	0,736	0,000223	70
17,5	1,75	20,4	30,6	0,664	0,748	0,000238	75
17,5	1,79	20,8	31,3	0,664	0,748	0,000242	80
17,5	1,82	21,0	31,9	0,658	0,753	0,000250	85
17,5	1,83	21,5	32,0	0,672	0,740	0,000246	90
17.5	1,87	21,9	32,8	0,559	0,743	0,000253	95

J_1	E_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_e	α
17,5	1,87	21,5	32,6	0,659	0,752	0,000252	100
17,5	1,85	21,5	32,4	0,665	0,747	0,000252	110
17,5	1,78	21,5	31,2	0,689	0,724	0,000234	120
17,5	1,67	20,4	29,3	0,695	0,719	0,000218	130

Kurve II zeigt die graphische Darstellung dieser Werte. Wie ersichtlich bleibt L_e anfangs ziemlich konstant, fängt dann bei 40° an zu sinken, bis es bei ca. 58° den kleinsten Wert erreicht, und steigt dann bis etwa 85°, von wo ab es wieder ziemlich konstant ist. Diese eigenartige Einbuchtung der L_e-Kurve bei erregtem Feld kann, wie wir später sehen werden, mit Hilfe der Kurve der gegenseitigen Induktion bei erregtem Feld sehr einfach erklärt werden.

Um den gegenseitigen Induktionskoeffizienten M experimentell zu ermitteln, schicken wir in die eine Spule einen bekannten Wechselstrom J_1 und messen die in der anderen Spule induzierte Spannung E_2. Dann ist:

$$M = \frac{E_2}{2 . \pi . c . J_1} .$$

Für die verschiedenen Stellungen der Spule im Feld ergeben sich folgende Werte:

Bei unerregtem Felde				Bei erregtem Felde			
E_2	J_1	M	α	E_2	J_1	M	α
0,36	17,0	0,000068	0	0,152	18,0	0,000027	0
0,37	17,0	0,000070	20	0,156	18,0	0,000028	20
0,42	17,0	0,000079	40	0,168	18,0	0,000030	40
0,48	16,9	0,000090	50	0,179	18,0	0,000032	50
0,55	16,9	0,000104	60	0,185	18,0	0,000033	60
0,67	17,0	0,000124	65	0,29	17,8	0,000052	70
0,76	17,0	0,000142	70	0,38	17,8	0,000067	75
0,89	16,8	0,000167	75	0,41	17,7	0,000072	80
0,95	16,6	0,000182	80	0,45	17,6	0,000080	85
1,06	16,6	0,000203	85	0,46	17,6	0,000082	90
1,11	16,8	0,000210	90	0,46	17,6	0,000082	95
1,14	16,8	0,000217	95	0,47	17,6	0,000083	100
1,15	17,0	0,000218	100	0,44	17,6	0,000078	110
1,12	17,0	0,000209	110	0,29	17,8	0,000051	120
0,83	17,0	0,000155	120				
0,51	17,0	0,000096	130				

Wie aus Kurve IV ersichtlich ist, steigt resp. fällt M schnell, sobald sich die Spule dem Pole nähert resp. wieder von ihm entfernt. Das Maximum liegt zwischen 90 und 110°.

Ist das Feld erregt (Kurve V, Fig. 20), so erhalten wir infolge der Sättigung des Eisens, welches die magnetische Leitfähigkeit bedeutend vermindert, erheblich kleinere Werte von M. Der Verlauf der Kurve ist jedoch im wesentlichen wie bei IV.

Das Ansteigen dieser Kurve erfolgt erst bei 60°, während die L-Kurve bei erregtem Felde (III), die hier nochmals aufgezeichnet ist, schon von 40° an abnimmt. Somit muss die L_e-Kurve bei erregtem Felde (II), welche die Kombination dieser beiden Kurven ist, zuerst wie Kurve III abnehmen, und sobald M (V) zunimmt, wieder ansteigen.

Durch Berechnung von M erhält man:

$$M = \frac{w^2 l \cdot 2}{10^8} \cdot 0{,}92 \cdot \lg\left(\frac{r_2}{r_s}\right); \quad r_2 = 96{,}7; \quad r_s = 6{,}42,$$

$$M = \frac{1{,}84 \cdot 64}{10^8} \cdot 16{,}7 \cdot \lg \frac{96{,}7}{6{,}42} = 0{,}0000355.$$

Wenn man den Kraftfluss, der durch das Feld geht, noch hinzuaddiert, erhält man:

$$\mathbf{M = 0{,}0000805.}$$

II. Untersuchung der Induktionskoeffizienten an einem unbewickelten Anker.

Die Dimensionen dieses Ankers sind:

Durchmesser der Armatur	170 mm
Länge der Armatur	173 „
Anzahl der Nuten	45
Nutenteilung	11,9 mm
Breite der Nuten	5,3 „
Tiefe der Nut	23,0 „

Der Anker besitzt noch drei Bandageeinfraisungen von einer Tiefe von 1,5 mm und einer Breite von 20 mm.

Für alle nun folgenden Untersuchungen befindet sich der Anker, der für die verschiedenen Fälle besonders gewickelt wurde, ausserhalb des Feldes.

1. Abhängigkeit des Selbstinduktionskoeffizienten L von der Lage der Spulenseiten.

a) Eine Spulenseite pro Nut (siehe Fig. 21, Spule A). Die Windungszahl beträgt 32.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
4,07	4,42	13,50	18,0	0,730	0,684	0,00201
5,20	5,50	21,47	28,6	0,752	0,658	0,00198
6,01	6,31	28,52	37,9	0,752	0,658	0,00200
8,08	8,36	52,41	67,5	0,776	0,631	0,00194
12,97	12,17	127,88	158,1	0,810	0,589	0,00200

Im Mittel L = **0,00199.**

Die Berechnung ergibt folgenden Wert:

$$\lambda_n = 1{,}25 \left(\frac{r}{3\, r_3} + \frac{r_4}{r_3}\right) = 1{,}25 \left(\frac{19}{15{,}9} + \frac{4}{5{,}3}\right) = \mathbf{2{,}44},$$

$$\lambda_k = 0{,}92 \lg\left(\frac{\pi\, r_2}{r_1}\right);\ r_2 = \frac{\tau}{2} = \frac{D\,\pi}{4} = 134{,}0\,\text{mm};\ \lambda_k = 0{,}92 \,.\, 1{,}90 = \mathbf{1{,}75},$$

$$\lambda_s = 0{,}46 \,.\, \lg\left(\frac{l_s}{d_s}\right) - 0{,}11;\quad l_s = 240\ \text{mm};\quad d_s = 15{,}6\ \text{mm},$$

$$\frac{l_s}{l} \,.\, \lambda_s = \frac{240}{173}\,[0{,}46 \,.\, 1{,}188 - 0{,}11] = \mathbf{1{,}39},$$

$$L = \frac{32^2 \,.\, 17{,}3}{10^8}\, 2\,[2{,}44 + 1{,}75 + 1{,}39] = \frac{32^2 \,.\, 17{,}3}{10^8} \,.\, 2 \,.\, 5{,}58 = \mathbf{0{,}00198}.$$

b) Eine Spulenseite füllt eine Nut nur halb aus (siehe Fig. 21, Spule B). Die Windungszahl dieser Spule ist 11.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
1,60	6,10	9,13	9,76	0,936	0,352	0,000295
2,62	9,98	22,36	23,5	0,950	0,312	0,000290
4,28	13,0	54,2	55,7	0,962	0,274	0,000287

Im Mittel L = **0,000291.**

Die Berechnung ergibt folgenden Wert:

$$\lambda_n = 1{,}25 \left(\frac{r}{3\,r_3} + \frac{r_4}{r_3}\right) = 1{,}25 \left(\frac{18}{15{,}9} + \frac{5}{5{,}3}\right) = \mathbf{2{,}68},$$

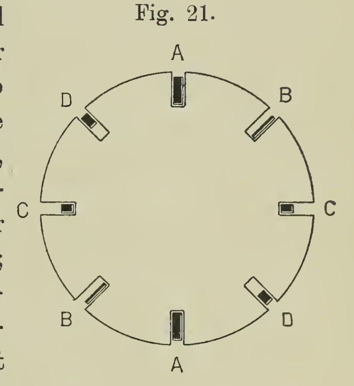
$$\lambda_k = 0{,}92 \lg \left(\frac{\pi\, r_2}{r_1}\right); \quad r_2 = 134 \text{ mm}; \quad \lambda_k = \mathbf{1{,}75},$$

$$= 0{,}46 \lg \left(\frac{l_s}{d_s}\right) - 0{,}11; \quad l_s = 240 \text{ mm}; \quad d_s = 13{,}7 \text{ mm},$$

$$\frac{l_s}{l}\,\lambda_s = \frac{240}{173}\,[0{,}46\,.\,1{,}24 - 0{,}11] = \mathbf{1{,}43},$$

$$L = \frac{11^2\,.\,17{,}3}{10^8}\,.\,2\,[2{,}68 + 1{,}75 + 1{,}43] = 5{,}86 = \mathbf{0{,}000246.}$$

Fig. 21.



Der berechnete und der experimentell ermittelte Wert stimmen hier nicht mehr so gut überein, wie im ersten Falle, wo die Spulenseite die Nut ganz erfüllte. Diese Abweichungen sind darauf zurückzuführen, dass die Kraftflussverteilung bei halbgefüllter Nut nicht dieselbe ist, wie wir sie der Rechnung zu Grunde gelegt haben; denn wenn wir wieder verschiedene Kraftlinienbilder aufzeichnen, so werden wir konstatieren, dass für diese halbgefüllte Nut das angenommene Kraftlinienbild nicht die grösste Leitfähigkeit besitzt; infolgedessen muss der berechnete Wert kleiner sein als der experimentell gefundene.

c) Eine Spulenseite füllt nur die untere Hälfte der Nut aus (siehe Fig. 21, Spule C). Die Windungszahl der Spule ist 15.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
2,42	6,35	13,08	15,35	0,853	0,527	0,000568
3,38	8,66	25,9	29,2	0,887	0,462	0,000573
4,80	11,22	48,9	53,8	0,907	0,420	0,000572
6,23	13,73	77,7	85,6	0,910	0,415	0,000575

Im Mittel **0,000572.**

Durch Berechnung erhält man:

$$\lambda_n = 1,25 \left(\frac{r}{3\,r_3} + \frac{r_4}{r_3}\right) = 1,25 \left(\frac{9}{15,9} + \frac{14}{5,3}\right) = \mathbf{4,02},$$

$$\lambda_k = 1,75; \quad \frac{l_s}{l} \cdot \lambda_s = 1,51,$$

$$L = \frac{15^2 \cdot 17,3}{10^8} \cdot 2 \cdot [4,02 + 1,75 + 1,51] = \frac{15^2 \cdot 17,3}{10^8} \cdot 2 \cdot 7,28 = \mathbf{0,000566}.$$

d) Eine Spulenseite füllt die obere Hälfte der Nut aus (siehe Fig. 21, Spule D). Die Spule besitzt 15 Windungen.

E_1	J_1	W	$J_1 \cdot E_1$	cos φ	sin φ	L
2,29	6,4	13,5	14,65	0,922	0,391	0,000446
5,94	13,7	77,7	81,5	0,952	0,326	0,000451

Im Mittel **0,000449.**

Durch Rechnung erhalten wir:

$$\lambda_n = 1,25 \left(\frac{r}{3\,r_3} + \frac{r_4}{r_3}\right) = 1,25 \left(\frac{9}{15,9} + \frac{5}{5,3}\right) = \mathbf{1,91},$$

$$\lambda_k = \mathbf{1,75}; \quad \frac{l_s}{l} \cdot \lambda_s = \mathbf{1,51},$$

$$L = \frac{15^2 \cdot 17,3}{10^8} \cdot 2\,[1,91 + 1,75 + 1,51] = \frac{15^2 \cdot 17,3}{10^8} \cdot 2 \cdot 5,17 = \mathbf{0,000405}.$$

Hier sind die Abweichungen noch grösser.

2. Abhängigkeit des gegenseitigen Induktionskoeffizienten M von der Lage der Spulenseiten.

a) Die Spulenseiten der zwei Spulen liegen in derselben Nut nebeneinander (siehe Fig. 22, Spule I). Jede Spule besitzt 11 Windungen.

E_2	J_1	M
0,305	6,1	0,000160
0,459	8,98	0,000163
0,659	13,0	0,000162

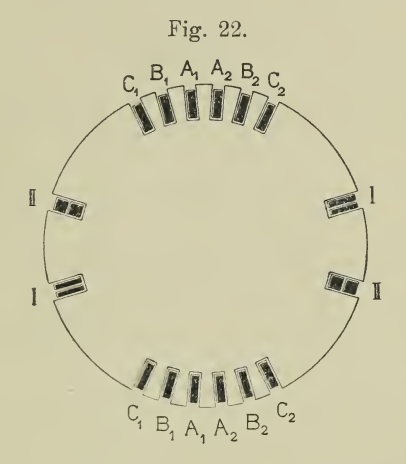
Im Mittel **0,000162.**

Durch Berechnung erhält man für M den Wert (siehe S. 20)

$$M = \frac{11^2 \cdot 17{,}3}{10^8} \cdot 2\,[2{,}68 + 1{,}75] = \frac{11^2 \cdot 17{,}3}{10^8} \cdot 2 \cdot 4{,}34 = \mathbf{0{,}000186.}$$

Diese grosse Abweichung zwischen dem berechneten und experimentell gefundenen Werte rührt von der einseitigen Verteilung

Fig. 22.



der Amperewindungen in der Nut her, welche eine ganz andere Kraftflussverteilung hervorruft, besonders in den Ecken der Spule, als wenn die Nut vollständig ausgefüllt ist.

b) Die Spulenseiten der beiden Spulen liegen in derselben Nut übereinander, die Windungszahl der beiden Spulen ist 15 (siehe Fig. 22, Spule II).

α) Strom in die untere Spule geschickt, induzierte Spannung der oberen Spule gemessen.

E_2	J_1	M
0,612	5,60	0,000350
0,911	8,66	0,000355
1,240	11,22	0,000352

Im Mittel **0,000352.**

β) Strom in die obere Spule geschickt, induzierte Spannung der unteren Spule gemessen.

E_2	J_1	M
0,871	7,76	0,000352
1,014	9,15	0,000354
1,24	11,1	0,000356
1,48	13,7	0,000348

Im Mittel **0,000353.**

Die Berechnung ergibt für M folgenden Wert:

$$\lambda_m = \frac{1,25}{r_1}\left(\frac{r}{2} + r_4\right) + 0,92 \lg \left(\frac{\pi r_2}{r_1}\right); \; r_2 = 134,0 \text{ mm},$$

$$\lambda_m = \frac{1,25}{5,3}(4,5 + 5) + 1,75 = 2,24 + 1,75 = 3,99,$$

$$M = \frac{15^2 \,.\, 1,73}{10^8} \,.\, 2 \,.\, 3,99 = \mathbf{0,000312.}$$

Auch diese Abweichung ist auf eine nicht genaue Uebereinstimmung des angenommenen und des wirklichen Kraftflusses zurückzuführen.

c) Die Spulenseiten der zwei Spulen liegen in benachbarten Nuten (siehe Fig. 22, Spulen A_1 und A_2). Die Spulen haben 32 Windungen.

E_2	J_1	M
0,582	5,50	0,000339
0,666	6,31	0,000336
0,914	8,36	0,000348
1,34	12,17	0,000350

Im Mittel **0,000343.**

Durch die Rechnung erhält man:

$$\lambda_m = 0,92 \,.\, \lg \left(\frac{r_2}{r_s}\right); \quad r_2 = 134 \text{ mm}; \quad r_s = 11,9 \text{ mm}; \quad \lambda_m = 0,966,$$

$$M = \frac{32^2 \,.\, 17,3}{10^8} \,.\, 2 \,.\, 0,966 = \mathbf{0,000341.}$$

d) Zwischen den Spulenseiten der beiden Spulen liegt eine freie Nut (siehe Fig. 22, Spulen A_1 und B_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_2	J_1	M
0,444	5,35	0,000272
0,732	8,66	0,000269
1,16	13,64	0,000270
0,903	10,58	0,000272

Im Mittel **0,000271.**

Die Rechnung ergibt folgenden Wert:

$$\lambda_m = 0{,}92 \,.\, \lg \left(\frac{134 - \frac{11{,}9}{2}}{2 \,.\, 11{,}9} \right) = 0{,}67,$$

$$M = \frac{32^2 \,.\, 17{,}3}{10^8} \,.\, 2 \,.\, 0{,}67 = \mathbf{0{,}000238.}$$

e) Zwischen den Spulenseiten der beiden Spulen liegen zwei freie Nuten (siehe Fig. 22, Spulen B_1 und B_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_2	J_1	M
0,350	4,88	0,000229
0,458	6,53	0,000224
0,599	8,35	0,000229
0.765	10,48	0,000232
0,952	13,53	0,000224

Im Mittel **0,000228.**

Durch Rechnung erhält man:

$$\lambda_m = 0{,}92 \lg \left(\frac{134 - 11{,}9}{3 \,.\, 11{,}9} \right) = 0{,}49,$$

$$M = \frac{32^2 \,.\, 17{,}3}{10^8} \,.\, 2 \,.\, 0{,}49 = \mathbf{0{,}000173.}$$

f) Zwischen den Spulenseiten der beiden Spulen liegen drei freie Nuten (siehe Fig. 22, Spulen B_1 und C_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_2	J_1	M
0,426	6,34	0,000182
0,488	8,40	0,000185
0,634	10,8	0,000187
0,770	13,24	0,000184

Im Mittel **0,0001845.**

Durch Berechnung erhält man:

$$\lambda_m = 0,92 \, . \, \lg \left(\frac{134 - \frac{3}{2} \, . \, 11,9}{4 \, . \, 11,9} \right) = 0,356,$$

$$M = \frac{32^2 \, . \, 17,3}{10^8} \, . \, 2 \, . \, 0,356 = \mathbf{0,000126.}$$

g) Zwischen den Spulenseiten der beiden Spulen liegen vier freie Nuten (siehe Fig. 22, Spulen C_1 und C_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_2	J_1	M
0,472	9,19	0,000164
0,565	10,70	0,000168
0,680	12,8	0,000169

Im Mittel **0,000167.**

Durch Rechnung erhält man:

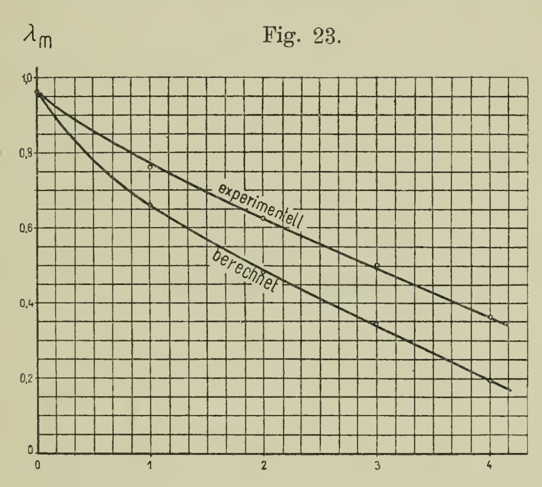
$$\lambda_m = 0,92 \, . \, \lg \left(\frac{134 - 2 \, . \, 11,9}{5 \, . \, 11,9} \right) = 0,246,$$

$$M = \frac{32^2 \, . \, 17,3}{10^8} \, . \, 2 \, . \, 0,246 = \mathbf{0,0000872.}$$

Wenn wir die Mittelwerte der experimentell befundenen Werte und die berechneten Werte von λ_m graphisch auftragen, so erhalten wir die Kurven von Fig. 23. Sie zeigen recht deutlich, dass je weiter

die Spulenseiten der zwei Spulen sich entfernen, um so mehr weichen die experimentell gefundenen Werte von den berechneten ab. Die Ursache hierfür liegt darin, dass die der Rechnung zu Grunde gelegte Kraftflussverteilung nicht ganz mit der wirklichen übereinstimmt. Offenbar ist der Kraftlinienweg in der Luft (Evolvente, Halbkreis, Evolvente) in Wirklichkeit etwas kleiner. Es wurde deshalb durch Annahme eines anderen Kraftlinienweges versucht, bessere Werte für M zu bekommen; dabei wurden aber, wenn eine Integration über-

Fig. 23.



haupt möglich war, die Endformeln so kompliziert, dass es wertlos erschien, dieselben hier anzugeben. Empfehlenswerter ist es daher, den berechneten Wert mit einem Korrektionsfaktor K zu multiplizieren. Derselbe ergibt sich aus diesen Versuchen wie folgt:

K = 1,15 für eine Nut zwischen den Spulenseiten
K = 1,30 „ zwei Nuten „ „ „
K = 1,45 „ drei „ „ „ „
K = 1,9 „ vier „ „ „ „

3. Abhängigkeit des scheinbaren Selbstinduktionskoeffizienten L_s von der Lage der Spulenseiten.

Eine Spule schliessen wir kurz, durch die andere schicken wir einen bekannten Wechselstrom.

Durch Strom-, Spannungs- und Wattmessung erhält man dann den scheinbaren Selbstinduktionskoeffizienten L_s.

a) Die Spulenseiten der zwei Spulen liegen in derselben Nut nebeneinander (siehe Fig. 22, Spule I). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 11.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
1,87	6,60	12,2	12,34	0,989	0,142	0,000128
2,77	9,16	25,0	25,3	0,989	0,142	0,000130

Im Mittel **0,000129.**

Durch Rechnung erhält man:

$$L_s = 0.$$

b) Die Spulenseiten der zwei Spulen liegen in derselben Nut übereinander (siehe Fig. 22, Spule II). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 15.

α) Die untere Spule ist kurzgeschlossen.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
2,46	6,37	14,83	15,65	0,948	0,330	0,000406
3,51	8,81	28,38	30,80	0,947	0,321	0,000407
5,77	12,8	71,5	74,0	0,965	0,262	0,000391
6,3	13,42	83,17	84,5	0,983	0,182	0,000396

Im Mittel **0,000400.**

Durch Rechnung erhält man:

$$L_s = L - \frac{M^2}{L} = 0,000449 - 0,000276 = \mathbf{0,000173.}$$

β) Die obere Spule ist kurzgeschlossen.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
2,83	6,61	17,5	18,7	0,936	0,356	0,000487
3,88	9,0	32.6	34,9	0,934	0,358	0,000491
5,23	11,33	56,0	59,4	0,942	0,337	0,000495

Im Mittel **0,000491.**

Die Rechnung ergibt:

$$L_s = L - \frac{M^2}{L} = 0,000571 - 0,000214 = \mathbf{0,000357.}$$

c) Die zwei Spulenseiten der zwei Spulen liegen in benachbarten Nuten (siehe Fig. 22, Spulen A_1 und A_2). Die Windungszahl der beiden Spulen beträgt je 32.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
4,42	4,85	16,17	21,4	0,755	0,656	0,00190
6,44	6,79	33,80	43,7	0,773	0,634	0,00192
12,53	11,96	122,54	150,0	0,817	0,576	0,00192

Im Mittel **0,00191.**

Durch Rechnung erhält man:

$$L_s = 0{,}00198 - 0{,}000058 = \mathbf{0{,}00192}.$$

d) Zwischen den zwei Spulenseiten liegt eine freie Nut (siehe Fig. 22, Spulen A_1 und A_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
8,34	8,56	55,07	71,3	0,780	0,630	0,00196
11,58	11,22	105,7	130,0	0,812	0,588	0,00193
14,88	13,85	174,0	206,0	0,824	0,566	0,00194

Im Mittel **0,00194.**

Durch Rechnung erhält man:

$$L_s = 0{,}00198 - 0{,}000037 = 0{,}00194.$$

e) Zwischen den Spulenseiten der zwei Spulen liegen zwei freie Nuten (siehe Fig. 22, Spulen B_1 und B_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
3,60	4,07	10,8	14,65	0,727	0,687	0,00195
6,84	7,33	38,26	50,15	0,764	0,660	0,00196
13,52	12,9	142,16	174,3	0,816	0,580	0,00196

Im Mittel **0,00196.**

Durch Rechnung erhält man:

$$L_s = 0{,}00198 - 0{,}000026 = 0{,}001954.$$

f) Zwischen den Spulenseiten der zwei Spulen liegen drei freie Nuten (siehe Fig. 22, Spulen C_1 und B_2). Die Windungszahl der beiden Spulen ist je 32.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
4,73	5,18	18,35	24,5	0,745	0,676	0,00197
6,58	7,21	35,4	47,5	0,745	0,676	0,00197
8,44	9,07	56,82	76,5	0,743	0,669	0,00198

Im Mittel **0,00197.**

g) Zwischen den Spulenseiten der zwei Spulen liegen vier freie Nuten (siehe Fig. 22, Spulen C_1 und C_2).

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L_s
8,24	8,66	54,2	71,3	0,760	0,652	0,00198
10,55	10,39	86,18	109,6	0,785	0,622	0,00200
11,12	10,58	96,0	118,0	0,813	0,588	0,00197

Im Mittel **0,00198.**

Von hier ab kann keine dämpfende Wirkung mehr konstatiert werden; L_s ist praktisch gleich L geworden.

Die Verkleinerung des Selbstinduktionskoeffizienten infolge der dämpfenden Wirkung der Kupferstäbe.

Bekanntlich induziert der Kraftfluss, der quer durch die Nut geht, in den Kupferstäben Wirbelströme, die ihrerseits wieder den Kraftfluss schwächen und so eine Verminderung des Selbstinduktionskoeffizienten zur Folge haben. Diese dämpfende Wirkung kann sehr schön nachgewiesen werden, wenn man zwischen die Drahtspule und die Nutenwände Messingbleche schiebt, wie dies in Fig. 24 veranschaulicht ist.

Fig. 24.

Zuerst wurde der Selbstinduktionskoeffizient der Spule ohne Messingbleche bestimmt. Es ergaben sich folgende Werte:

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
6,0	6,29	27,8	37,7	0,738	0,775	0,000690
9,48	10,28	69,3	97,8	0,708	0,706	0,000692
12,32	13,0	117,0	160,0	0,729	0,684	0,000688

Im Mittel **0,000690.**

Bei eingeschobenen Messingblechen (Dicke 0,7 mm) erhielt man für dieselbe Spule folgende Werte von L:

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
7,51	8,4	51,5	63,2	0,815	0,584	0,000553
9,17	10,2	76,0	93,4	0,814	0,580	0,000555
9,32	10,9	88,0	108,0	0,814	0,580	0,000558

Im Mittel **0,000555.**

Der bei den beiden Versuchsreihen verwendete Wechselstrom hatte eine Periodenzahl von $c = 150$.

Der Selbstinduktionskoeffizient der Spule sinkt also, wie wir sehen, infolge der dämpfenden Wirkung der Messingbleche von 0,000690 auf 0,000555 herab. Bei noch grösserer Periodenzahl und dickeren Messingblechen würde die Differenz noch bedeutender sein. Man ersieht hieraus, dass die Anwendung von hohen Kupferstäben ein sehr gutes Mittel ist, um den Selbstinduktionskoeffizienten der Ankerspulen herabzudrücken.

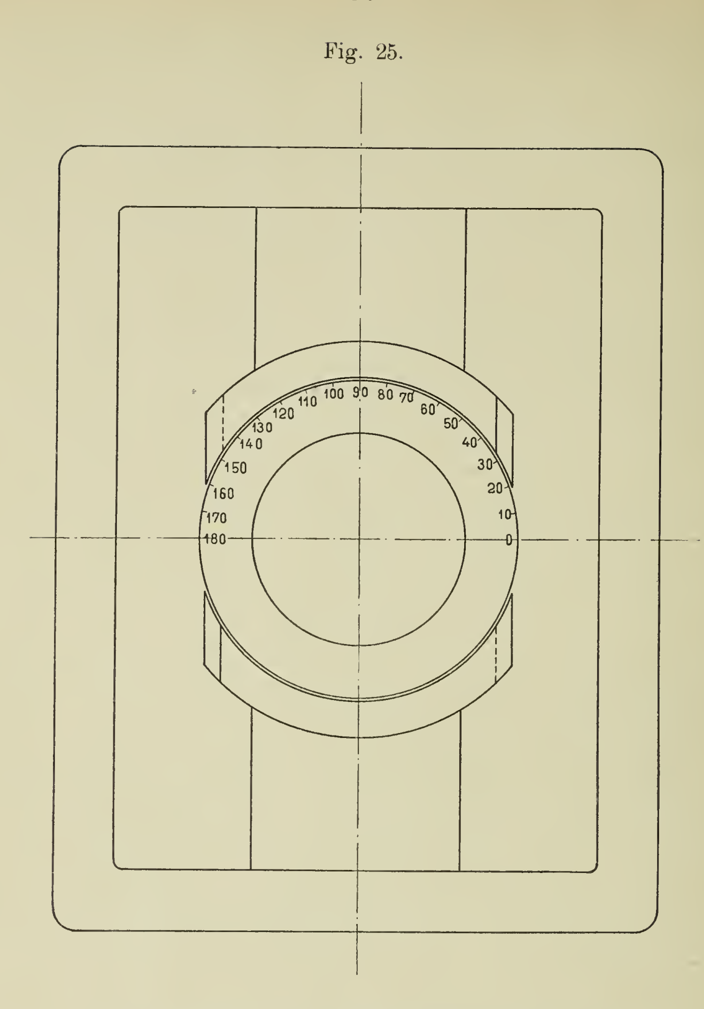
III. Untersuchungen an einer Maschine mit Ringanker der E.A.G. vorm. Schuckert & Co. Nürnberg.

In Fig. 25 ist diese Maschine dargestellt. Die Dimensionen derselben sind:

Aeusserer Durchmesser der Armatur . . 208 mm
Innerer Durchmesser der Armatur . . . 109 „
Armaturlänge . . . . 190 „

Von der Wickelung wurden zwei diametral gelegene Spulen (siehe Fig. 26, Spulen I und II) von der Wickelung losgelöst, und zunächst der Selbstinduktionskoeffizient für den Fall, dass der Anker ausserhalb des Feldes sich befinde, untersucht.

Fig. 25.



1. Der Anker ist ausserhalb des Feldes.

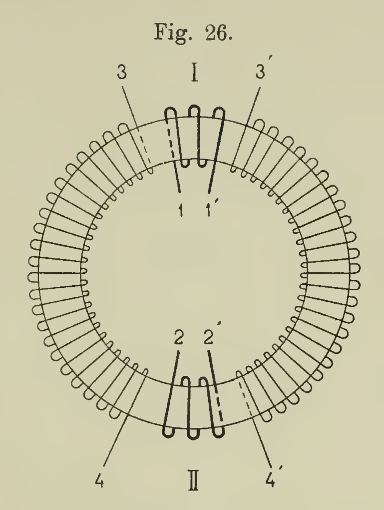
a) Der Selbstinduktionskoeffizient einer Spule, z. B. Spule I, wenn alle übrigen Enden (2, 2′, 3, 3′, 4 und 4′) unverbunden sind.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
2,46	8,8	15,8	21,7	0,730	0,682	0,000608
3,65	11,3	33,0	41,2	0,801	0,598	0,000614
5,18	14,3	62,7	74,1	0,847	0,532	0,000612

Im Mittel **0,000611.**

Wenn wir die Magnetisierungskurve des Ankereisens genau kennen würden, so könnten wir daraus diesen Wert von L ohne weiteres be-

Fig. 26.



rechnen; denn abgesehen von der Streuung in die Luft, die verhältnismässig klein ist, verläuft der gesamte Kraftfluss der Spule im lamellierten Ankereisen.

b) Die Spule II ist kurzgeschlossen.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
1,54	29,5	43,0	45,5	0,945	0,327	0,0000514
1,88	35,0	62,6	65,8	0,951	0,310	0,0000502
2,15	39,0	80,8	84,0	0,952	0,306	0,0000509

Im Mittel **0,0000508.**

Durch Kurzschliessen der Spule II wird der von der Spule I erzeugte Kraftfluss sehr stark gedämpft, so dass der Selbstinduktionskoeffizient der Spule I auf den Wert 0,0000508, d. h. auf 8,4 % des unter a) gefundenen Wertes herabsinkt.

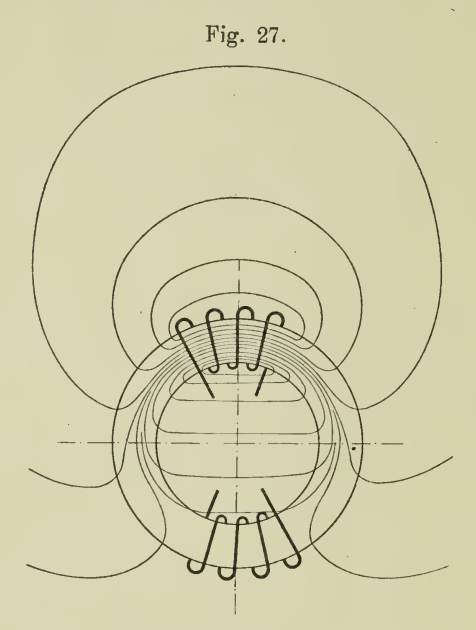
c) Durch beide Spulen wird ein Wechselstrom geschickt entsprechend dem gleichzeitigen Kommutieren derselben.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L
0,65	31,0	17,2	20,2	0,852	0,524	0,0000372
0,78	36,8	24,5	28,6	0,858	0,514	0,0000367
0,84	39,8	28,5	33,1	0,862	0,508	0,0000368

Im Mittel **0,0000369.**

Die Kraftflüsse im Ankereisen, die von den beiden Spulen erzeugt werden, haben die entgegengesetzten Richtungen und heben sich, da die Ampèrewindungen der zwei Spulen gleich sind, daher in ihren Wirkungen auf. Die Selbstinduktion der Spulen rührt vom Kraftfluss her, der seinen Weg teilweise durch die Luft nimmt und nur einer Spule angehört. In Fig. 27 ist ein solches Kraftlinienbild einer Spule skizziert, über welches sich noch ein gleiches, aber umgekehrtes, von der anderen Spule herrührend, lagern würde.

Fig. 27.



Nun sind aber in Wirklichkeit die Enden 3 und 3′, 4 und 4′ durch die Bürsten direkt miteinander verbunden. Und wenn wir hier diese Verbindung auch herstellen, so finden wir, dass der Wert von L praktisch gleich Null ist; dies war vorauszusehen; denn durch die Wickelung 3, 4, 4′, 3′ wird nicht allein der Kraftfluss, der nur im Ankereisen verläuft, sondern auch derjenige, der in die Luft austritt, infolge der grossen Windungszahl der Wickelung fast ganz gedämpft.

2. Der Anker ist im Feld.

Hier untersuchen wir nur den Selbstinduktionskoeffizienten entsprechend dem Falle c). Indem wir den Anker drehen, erhalten wir für die verschiedenen Lagen der Spule gegenüber dem Felde (Fig. 25) folgende Werte.

a) Feld unerregt.

E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L	α
0,85	36,5	24,7	30,8	0,800	0,600	0,0000470	0
0,85	36,3	24,7	30,7	0,804	0,595	0,0000469	10
0,87	36,2	25,5	31,3	0,814	0,581	0,0000470	20
0,95	36,2	27,0	34,4	0,785	0,619	0,0000550	30
1,04	36,1	28,2	37,4	0'754	0,657	0,0000631	40
1,10	36,1	29,8	39,6	0,753	0,658	0,0000676	50
1,14	36,1	30,8	41,2	0,747	0,665	0,0000711	60
1,17	36,0	31,6	42,1	0,747	0,665	0,0000732	70
1,18	36,0	31,8	42,5	0,747	0,665	0,0000738	80
1,18	36,0	31,8	42,5	0,737	0,665	0,0000738	90

b) Feld erregt.

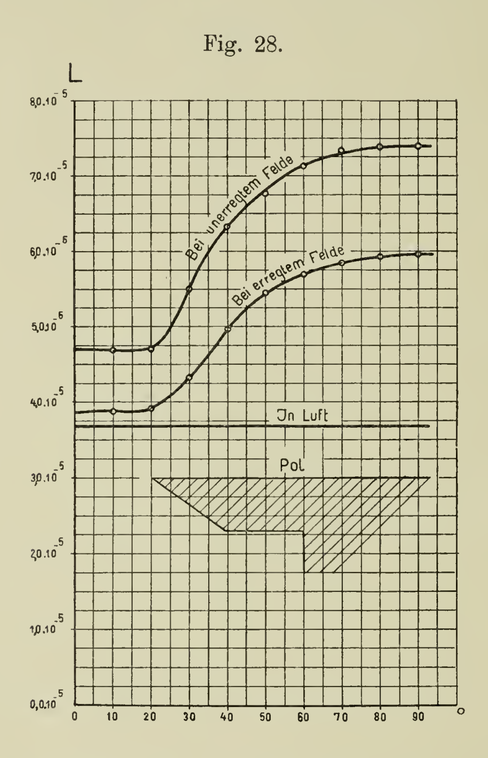
E_1	J_1	W	$J_1 . E_1$	cos φ	sin φ	L	α
0,78	37,0	24,3	28,9	0,841	0,540	0,0000386	0
0,80	37,0	24,9	29,4	0,847	0,532	0,0000388	10
0,81	37,0	24,9	30,0	0,830	0,558	0,0000390	20
0,87	36,8	26,8	31,9	0,841	0,541	0,0000431	30
0,94	36,9	28,2	34,6	0,815	0,579	0,0000497	40
0,98	37,1	28,9	36,4	0,795	0,607	0,0000545	50
1,01	37,0	29,9	37,4	0,797	0,602	0,0000569	60
1,03	36,9	30,0	38,1	0,787	0,617	0,0000584	70
1,06	36,8	30,4	38,9	0,781	0,625	0,0000593	80
1,05	36,9	30,6	38,8	0,788	0,616	0,0000595	90

Wie man aus den Tabellen ersieht, ist hier der Wert von L einer Spule in der Nulllage erheblich grösser als wenn der Anker sich ausserhalb des Feldes befindet. Der Grund hierfür liegt darin, dass ein Teil des Kraftflusses der Spule durch das Feld geht. Ist die Maschine erregt, so nimmt er ab. Im übrigen hat das auf S. 32 Gesagte ohne weiteres auch hier Gültigkeit.

In Fig. 28 sind die Werte von L bei erregtem und unerregtem Felde graphisch aufgetragen. Bis ca. 20^0 bleibt L konstant, wächst dann der grösseren magnetischen Leitfähigkeit wegen sehr rasch zu seinem Maximalwert bei 90^0 an. Einen ähnlichen Verlauf erhalten

wir, wenn das Feld erregt ist. Beim Trommelanker war der Verlauf bei erregtem Felde ein ganz anderer (S. 31). Dort war offenbar die Vergrösserung des magnetischen Widerstandes durch die Sättigung der Zähne im Verhältnis zur Verkleinerung des magnetischen Widerstandes durch die Pole überwiegend, so dass L in der Nähe derselben abnehmen musste, während beim Ringanker die Erhöhung des magnetischen Widerstandes durch die Sättigung der Zähne wegfällt,

Fig. 28.



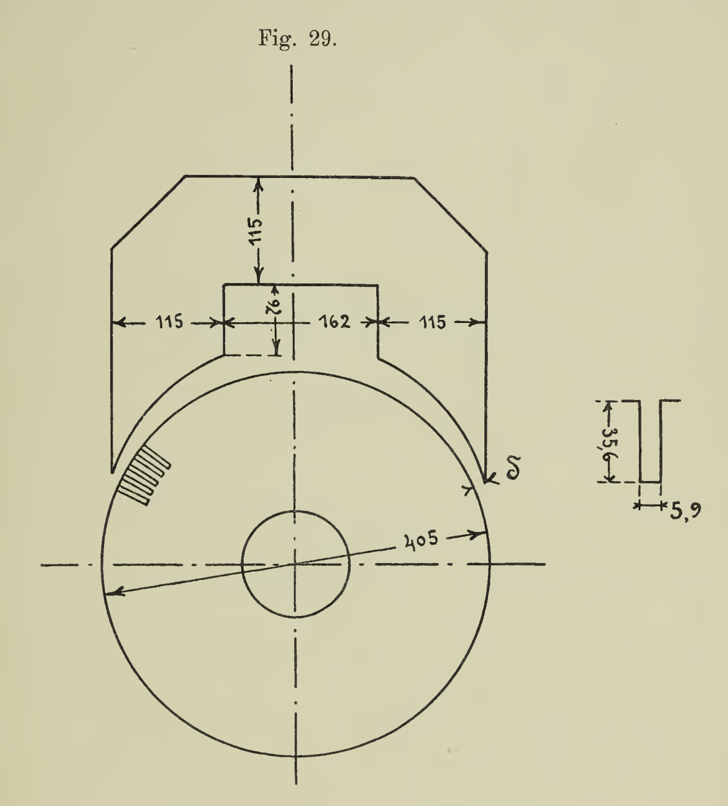
und somit L unter den Polen grösser sein muss, als in der neutralen Zone.

Bei der Ringwickelung ist die Dämpfung der kurzgeschlossenen Spulen durch die übrige Wickelung so stark (siehe S. 52), dass L, M und L_s praktisch gleich Null werden und deshalb für die Kommutation nicht in Betracht kommen wie bei der Trommelwickelung, wo diese dämpfende Wirkung der übrigen Ankerwickelung nicht vorhanden ist. Aus diesem Grunde wurden beim Ringanker keine weiteren Untersuchungen über die Werte von L, M und L_s angestellt.

IV. Untersuchungen von Parshall und Hobart.

In ihrem Buche „Electric Generator“ S. 160 u. f. haben Parshall und Hobart Versuche über Selbstinduktionskoeffizienten von

Fig. 29.



Ankerspulen angegeben. Eine der untersuchten Maschinen war ein 25 HP. Tramwaymotor mit folgenden Nutendimensionen:

$r_1 = r_3$	5,6 mm
r	27,5 „
r_5	6,0 „
τ	320,0 „
p	2
r_2	213,0 „
l	210,0 „
l_s	385,0 „
d_s	20,0 „

Experimentell ergab sich für:

$$\lambda = 6,63.$$

Aus den oben angegebenen Dimensionen folgt für:

$$\lambda = \lambda_n + \lambda_k + \frac{l_s}{l} \lambda_s = 6{,}23.$$

Parshall und Hobart führten noch Messungen aus, indem sie zwei, drei und vier Spulen à vier Windungen in Serie schalteten und jedesmal die magnetische Leitfähigkeit λ oder den Kraftfluss pro Ampèrewindung und 1 cm Armaturlänge bestimmten. Zuerst befand sich der Anker in Luft, nachher wurden dieselben Versuche noch für verschiedene Luftzwischenräume durchgeführt, die durch ein besonders lamelliertes Polstück eingestellt werden konnten (siehe Fig. 29). Da die Bohrung des Polstückes und der Ankerdurchmesser gleich gross sind, so wird beim Entfernen des ersteren vom Anker der Luftzwischenraum über den ganzen Polbogen nicht derselbe bleiben, sondern von den äusseren Spitzen nach innen zunehmen. In den nachfolgenden Tabellen und Kurven bedeutet der Luftzwischenraum δ den Abstand der äussersten Polspitze von der Armatur (siehe Fig. 29).

1. Eine Spule von 4 Windungen. Widerstand = 0,014 Ohm. J_m = Impedanz.

J	E	J_m	$2\pi c L$	c	L	λ	δ
23,0	1,07	0,0466	0,0444	97	0,0000728	11,1	∞
22,0	1,268	0,0576	0,0558	99	0,0000897	13,7	9,1
22,5	1,56	0,0694	0,0679	99	0,000109	16,8	4,4
20,0	1,725	0,0863	0,0852	99	0,000137	21,2	2,4
20,0	2,29	0,1145	0,1137	99	0,000183	28,0	1,2

2. Zwei Spulen von 4 Windungen in Serie. Widerstand = 0,033 Ohm.

J	E	J_m	$2\pi c L$	c	L	λ	δ
21,0	2,64	0,1256	0,1212	99	0,000195	7,5	∞
17,0	2,85	0,1676	0,1645	100	0,000262	10,0	9,1
16,5	3,55	0,215	0,212	100	0,000338	13,0	4,4
10,0	2,77	0,277	0,275	100	0,000438	16,8	2,4
9,0	3,20	0,356	0,355	99	0,000572	21,8	1,2

3. Drei Spulen von 4 Windungen in Serie.
Widerstand = 0,0473 Ohm.

J	E	J_m	$2\pi c L$	c	L	λ	δ
12,0	2,96	0,246	0,241	99	0,000388	6,6	∞
9,0	2,98	0,331	0,328	98	0,000533	9,0	9,1
14,0	6,3	0,450	0,447	98	0,000726	12,4	4,4
12,0	7,08	0,590	0,558	98	0,000958	15,9	2,4
16,0	12,5	0,782	0,781	98	0,001270	21,8	1,8

4. Vier Spulen von 4 Windungen in Serie.
Widerstand = 0,0637 Ohm.

J	E	J_m	$2\pi c L$	c	L	λ	δ
17,0	6,47	0,380	0,375	100	0,000598	5,8	∞
13,0	7,06	0,543	0,538	100	0,000871	8,2	9,1
9,0	6,64	0,738	0,735	100	0,00117	10,0	4,4
15,0	16,25	1,082	1,079	100	0,00172	16,6	2,4
15,5	21,3	1,375	1,374	100	0,00219	21,2	1,2

Die Werte λ dieser Tabelle sind in Fig. 30 graphisch dargestellt. Aus den Kurven geht recht deutlich hervor, wie die magnetische Leitfähigkeit einer Spule kleiner wird, wenn die Seiten derselben sich statt auf eine auf mehrere Nuten verteilen, und zwar ist diese Abnahme um so grösser, je grösser die magnetische Leitfähigkeit ist. Die oberen Kurven fallen daselbst rascher ab als die unterste. Diese Abnahme von L haben wir auch schon früher bei der Berechnung des Selbstinduktionskoeffizienten solcher Spulen konstatiert (siehe S. 19).

Eine weitere Maschine, die Parshall und Hobart untersuchten, war ein 20 HP. Motor (siehe Fig. 31), charakterisiert durch eine sehr kleine Nutenzahl (29). Die Dimensionen desselben sind:

Ankerdurchmesser	280,0 mm
Ankerlänge	230,0 „
Nutenzahl	29
Nutenteilung	30,3 „
Spulenzahl (à 6 Windungen, d. h. 6 Spulenseiten pro Nut)	87

Fig. 30.

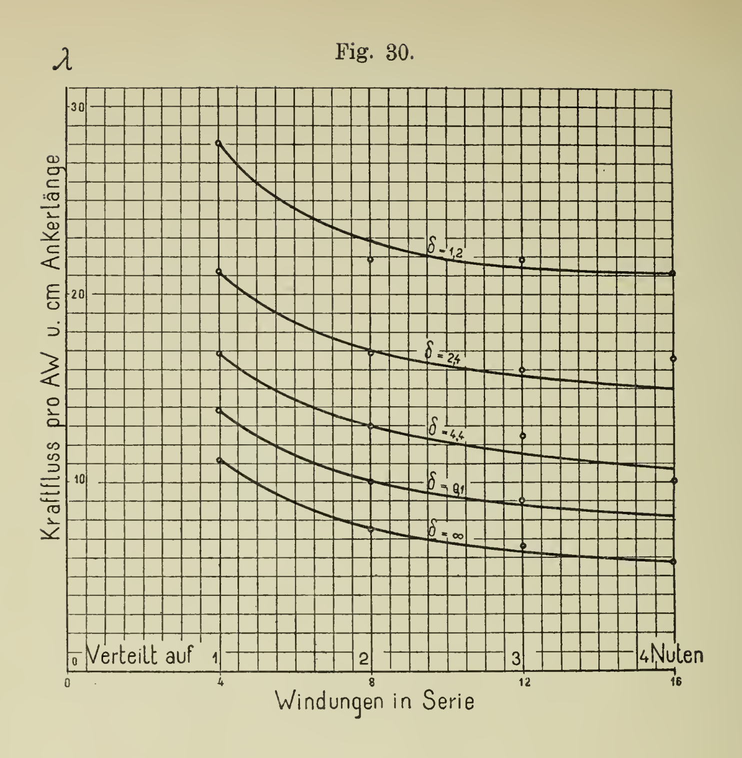
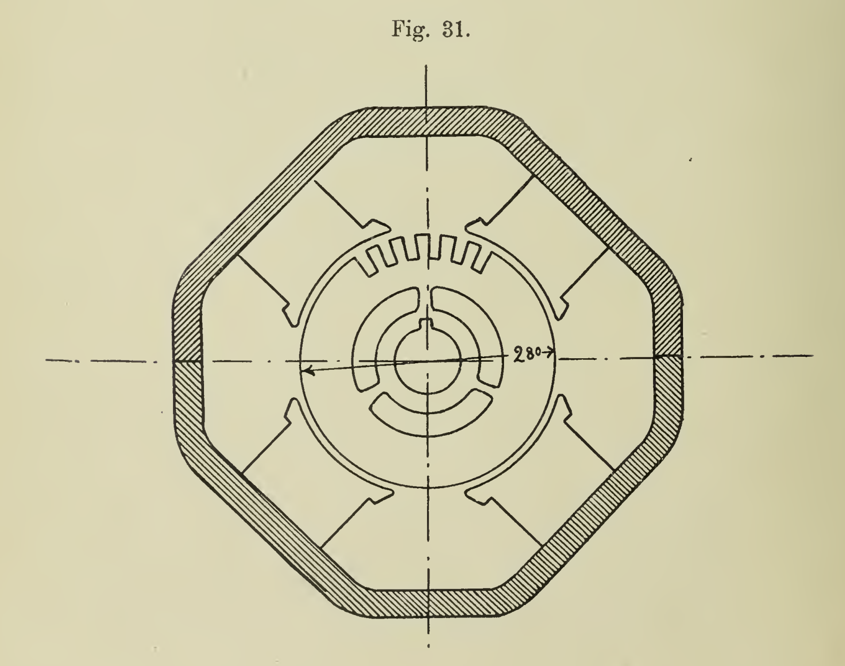
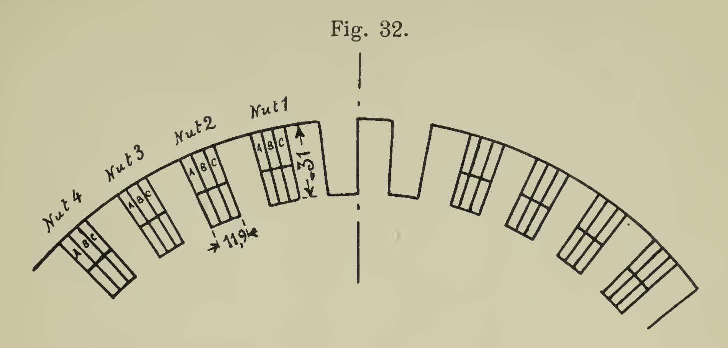

λ
Kraftfluss pro AW u. cm Ankerlänge
30
20
10
0
δ = 1,2
δ = 2,4
δ = 4,4
δ = 9,1
δ = ∞
Verteilt auf 1
2
3
4 Nuten
0
4
8
12
16
Windungen in Serie

Fig. 31.


280

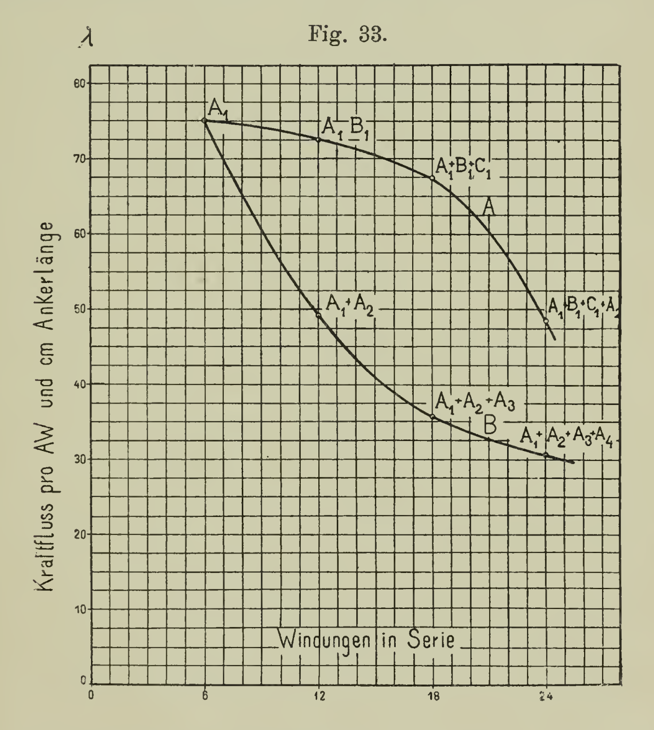
Die in der folgenden Tabelle angegebenen Werte von λ beziehen sich auf die Nulllage der Spule im Feld. In Fig. 32 ist die

Fig. 32.



Anordnung der Spulen in den Nuten angegeben. Durch Versuche ist festgestellt worden, dass die drei Spulen A, B und C praktisch

Fig. 33.



denselben Selbstinduktionskoeffizienten L haben. Nun wurde λ in Abhängigkeit von der Windungszahl untersucht und zwar:

1. Wenn die Windungen möglichst nahe beisammen sind.

Zuerst bestimmte man λ der Spule A, dann wurde Spule B und



Spule C derselben Nut, schliesslich noch Spule A der benachbarten Nut in Serie geschaltet und jedesmal λ bestimmt (siehe Tabelle I). Diese Werte sind in Fig. 33 graphisch aufgetragen (Kurve A).

2. Wenn die Windungen auf mehrere Nuten verteilt sind.

Es wurden nach und nach die Spulen A der Nuten 1, 2, 3 und 4 hintereinander geschaltet und jedesmal λ ermittelt. Diese Werte sind in Tabelle II zusammengestellt und in Fig. 33 graphisch aufgetragen (Kurve B). Aus diesen Kurven folgt, dass die Spulen, deren Windungen möglichst nahe beisammen sind, einen grösseren Selbstinduktionskoeffizienten besitzen, als wenn dieselben auf mehrere Nuten verteilt sind.

Tabellen zu den Versuchen von Parshall und Hobart.

Anordnung der Spulen in der Nut	Kraftfluss pro AW. und cm Ankerlänge	
	berechnet	durch Versuch
Tabelle I.		
Nut 1, Spule B	5,9	7,5
Nut 1, Spule AB	5,9	7,25
Nut 1, Spulen ABC	5,9	6,75
Nut 1, Spulen ABC „ 2, Spule B	3,9	4,85
Tabelle II.		
Nut 1, Spule B	5,9	7,5
Nut 1, Spule B „ 2, „ B	4,05	4,9
Nut 1, Spule B „ 2, „ B „ 3, „ B	2,6	3,55
Nut 1, Spule B „ 2, „ B „ 3, „ B „ 4, „ B	2,1	3,1